

Partícula de Dirac em 1+1 dimensões sujeita a um potencial escalar da forma exponencial

A. Smirnov & A. D. de Oliveira Alves

Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

(Recebido em 01 de setembro de 2009; aceito em 01 de novembro de 2009)

É considerada a partícula de Dirac em 1+1 dimensões sujeita a um potencial escalar da forma exponencial. Foram encontradas soluções exatas da equação de Dirac para o caso indicado e determinado o espectro da partícula. No caso de espectro discreto as soluções exatas são expressas através de polinômios generalizados de Laguerre. Foi demonstrado que sempre existe pelo menos um estado ligado com energia diferente de zero. A quantidade de estados ligados é limitada e determinada por parâmetros do problema na forma $N = \left\lfloor \frac{m_0 c^2}{\beta \hbar \alpha} \right\rfloor$. Foi analisado também a existência de estado com energia zero e demonstrado que tal estado sempre existe. As autofunções de todos os estados ligados são normalizáveis. Os fatores de normalização foram encontrados analiticamente. Além disso, várias relações úteis para polinômios de Laguerre generalizados foram encontradas.

Palavras-chave: partícula de Dirac, potencial escalar, polinômios de Laguerre.

In the article the Dirac particle in 1+1 dimensions subject to the exponential scalar potential is considered. There were found exact solutions of the Dirac equation and energy spectrum of the particle. For the case of discrete spectrum the exact solutions are represented by generalized Laguerre polynomials. There was shown that at least one bound state with energy different from zero always exists. A number of bound states is limited and is determined by the parameters of the problem as $N = \left\lfloor \frac{m_0 c^2}{\beta \hbar \alpha} \right\rfloor$. It was also demonstrated that the zero energy state always exists. For all states the normalization factor was found explicitly. Besides that various useful relations for generalized Laguerre polynomials were determined.

Keywords: Dirac particle, scalar potential, Laguerre polynomials.

1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho consideramos a partícula de Dirac em 1+1 dimensões sujeita a um potencial escalar na forma exponencial. Esse modelo descreve um férmion cujo movimento é restrito a uma única dimensão. Tal situação pode ser aplicada, por exemplo, em materiais cuja produção provém da tecnologia moderna em escalas nanométricas. A análise do comportamento da partícula de Dirac realizada nesse trabalho pode ser aplicada para prever propriedades de alguns nanomateriais. Por outro lado o problema considerado desperta interesse por ser um modelo que pode ser resolvido de forma exata, isto é, a solução é apresentada através de funções elementares ou especiais.

O problema da partícula de Dirac em 1+1 dimensões vem sendo discutida em várias publicações. Na década de 80 o interesse foi focalizado no átomo de hidrogênio unidimensional [1], [2], [3], [4], [5]. Foi discutida a descrição adequada do modelo do átomo de hidrogênio em uma única dimensão espacial, as formas da equação de Dirac unidimensional, métodos de solução da equação com potencial vetorial, apresentadas soluções e estudadas suas propriedades. Mais recentemente foram estudados os modelos modificados do átomo de hidrogênio unidimensional: potencial de Coulomb blindado [6], estados ligados da partícula de Dirac com auto-interação [7], ressonância na presença de interação adicional puntiforme [8]. A equação de Dirac unidimensional com potencial escalar da forma linear foi estudada em trabalhos [9], [10], [11], [12], [13] e da forma linear inversa em [14].

Nesse trabalho estudamos a partícula de Dirac em 1+1 dimensões sujeita a um potencial escalar da forma exponencial. Em virtude do potencial não depender do tempo o problema é estacionário e se reduz a equação de Dirac estacionária com potencial escalar. Nós resolvemos o problema de forma exata e apresentamos o espectro da partícula de Dirac junto com as autofunções expressas através de polinômios de Laguerre generalizados e discutimos seu comportamento. Além disso, são discutidas várias propriedades de polinômios de Laguerre generalizados obtidas das autofunções do problema. Mencionamos que alguns aspectos do problema com o potencial na forma exponencial foram discutidos em [15].

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideramos a equação estacionária de Dirac em 1+1 dimensões na forma

$$H\psi = E\psi \quad (1)$$

onde, o Hamiltoniano de Dirac é dado como

$$H = \alpha c \hat{p} + \beta (mc^2 + V_s), \quad (2)$$

onde $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ é o operador do momento, c é a velocidade da luz, \hbar é a constante de Planck, m é a massa da partícula, V_s é o potencial escalar, α e β são matrizes de Dirac, que em 1+1 dimensões podem ser escolhidas como matrizes de Pauli na forma

$$\alpha = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Logo, a função de onda da Eq. (2) tem duas componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Consideraremos o potencial escalar na forma exponencial

$$V_s = a e^{-bx}, \quad (5)$$

onde a e b são constantes, parâmetros do problema, sendo a arbitrário e $b > 0$.

O problema é considerado para $x: -\infty < x < \infty$.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

Escrevemos a Eq. (2) em componentes

$$[-i c \hat{p} + (mc^2 + V_s)]\chi = E\phi \quad (6)$$

$$[i c \hat{p} + (mc^2 + V_s)]\phi = E\chi \quad (7)$$

expressamos a componente χ da Eq. (7) através de ϕ para energia E diferente de zero

$$\chi = \frac{[i c \hat{p} + (mc^2 + V_s)]\phi}{E}, \quad E \neq 0, \quad (8)$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (6) recebemos a equação para componente ϕ

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + W\phi = \varepsilon^2 \phi \quad (9)$$

onde

$$W = U^2 - \frac{aV}{c\hbar}, \quad U = \frac{mc^2 + V_s}{c\hbar}, \quad \varepsilon^2 = \frac{E^2}{(c\hbar)^2}, \quad (10)$$

Aplicando a forma explícita do potencial escalar (5) recebemos a função W na forma

$$W = e^{-2bx} \left(\frac{a}{c\hbar} \right)^2 + e^{-bx} \frac{a}{c\hbar} \left(b + \frac{2mc^2}{c\hbar} \right) + \left(\frac{mc^2}{c\hbar} \right)^2, \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (9) recebemos a equação do tipo Schrödinger para componente ϕ

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + [\eta - V(x)]\phi = 0, \quad (12)$$

onde

$$\eta = \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{mc^2}{c\hbar} \right)^2 \right], \quad V(x) = V_1 e^{-2bx} + V_2 e^{-bx} \quad (13)$$

com

$$V_1 = \left(\frac{a}{c\hbar} \right)^2, \quad V_2 = \frac{a}{c\hbar} \left(b + \frac{2mc^2}{c\hbar} \right). \quad (14)$$

Analogamente podemos expressar a componente χ através de ϕ usando a Eq. (6)

$$\chi = \frac{[-i c \hat{p} + (mc^2 + V_s)]\phi}{E}, \quad E \neq 0, \quad (15)$$

Efetando o mesmo procedimento para a componente χ chegamos à equação

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} + [\eta' - V'(x)]\chi = 0, \quad (16)$$

onde

$$\eta' = \left[\varepsilon^2 - \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right], \quad V'(x) = V'_1 e^{-2bx} + V'_2 e^{-bx} \quad (17)$$

com

$$V'_1 = \left(\frac{a}{c\hbar} \right)^2, \quad V'_2 = \frac{a}{c\hbar} \left(-b + \frac{2mc^2}{c\hbar} \right), \quad (18)$$

Resolveremos o problema (12) para o caso do espectro discreto. Na Ref. [16] é demonstrado que a condição necessária do espectro discreto do problema (12) é determinada como

$$V_1 > 0, \quad V_2 < 0, \quad (19)$$

A condição do espectro discreto do problema (12) é

$$V'_1 > 0, \quad V'_2 < 0. \quad (20)$$

O espectro discreto do problema (1), da equação de Dirac, existe quando as condições (19), (20) são satisfeitas simultaneamente. Das Eqs. (19), (20) recebemos as condições para os parâmetros do problema a, b que admitem espectro discreto da partícula de Dirac

$$a < 0, \quad 0 < b < \frac{2mc^2}{c\hbar}, \quad (21)$$

Segundo a Ref. [16] o espectro discreto do problema (12) é dado como

$$\eta_n = - \left(\frac{mc^2}{c\hbar} - b_n \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

para autofunções dadas da seguinte forma

$$\phi_n = z^\mu e^{-z/2} L_n^{2\mu}(z), \quad (23)$$

onde $L_n^{2\mu}(z)$ são polinômios de Laguerre generalizados

$$z = \frac{2|a|}{b c \hbar} e^{-bx}, \quad \mu = \frac{\sqrt{-\eta_n}}{b}. \quad (24)$$

Restaurando os valores da energia E das Eqs. (13), (10) recebemos

$$E = \pm b c \hbar \sqrt{\frac{2mc^2}{b c \hbar} n - n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

onde o sinal “+” corresponde aos estados das partículas e o sinal “-” corresponde aos estados das anti-partículas. De acordo com Ref. [16] a quantidade de estados N_{lig} é determinada como

$$N_{lig} = \left[\frac{mc^2}{b c \hbar} \right], \quad (26)$$

onde $[x]$ é parte inteira da quantidade x .

Utilizando a Eq. (8) e relações entre polinômios de Laguerre generalizados (8.971.2 [17], (10.12 (23), (24) [18]) encontramos a componente χ

$$\chi = \sqrt{\frac{2\mu+n}{n}} z^\mu e^{-z/2} L_{n-1}^{2\mu}(z). \quad (27)$$

Então, a forma da função de onda ψ é

$$\psi_n = N z^\mu e^{-z/2} \begin{pmatrix} L_n^{2\mu}(z) \\ \sqrt{\frac{2\mu+n}{n}} L_{n-1}^{2\mu}(z) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

onde N é o fator de normalização, que deve ser encontrado pela condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^\dagger \psi_n dx = 1. \quad (29)$$

Substituindo na Eq. (29) as componentes da Eq. (28) e trocando a variável na integração temos

$$\left[N^2 \frac{1}{b} \int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \left(L_n^{2\mu}(z) \right)^2 dz + \frac{2\mu+n}{n} \frac{1}{b} \int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \left(L_{n-1}^{2\mu}(z) \right)^2 dz \right] = 1, \quad (30)$$

Usando as expressões das integrais na Eq. (30) da Eq. (53) do apêndice recebemos

$$N^2 \frac{1}{b} \left[\frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{2\mu \cdot n!} + \frac{2\mu+n}{n} \frac{\Gamma(2\mu+n)}{2\mu \cdot (n-1)!} \right] = 1$$

ou

$$N^2 \frac{2\Gamma(2\mu+n+1)}{b \cdot 2\mu \cdot n!} = 1$$

de onde

$$N_n = \sqrt{\frac{b}{2} \frac{2\mu n!}{\Gamma(2\mu+n+1)}} \tag{30}$$

3.1 ESTADO DE ENERGIA ZERO

Discutimos aqui a existência do estado de energia zero. A fim disso resolveremos a Eq. (1) com $E = 0$ no lado direito, o que permite encontrar as componentes na forma de integrais

$$\begin{aligned} \phi &= C_1 \exp \left[- \int \frac{1}{c\hbar} (mc^2 + V_z) dx \right] \\ \chi &= C_2 \exp \left[\int \frac{1}{c\hbar} (mc^2 + V_z) dx \right], \end{aligned} \tag{32}$$

Substituindo V_z nas fórmulas (32) e trocando a variável recebemos

$$\int \frac{1}{c\hbar} (mc^2 + V_z) dx = - \int \left(\frac{mc^2}{bc\hbar z} - \frac{1}{2} \right) dz,$$

Das Eqs. (24), (22) vemos que $\frac{mc^2}{bc\hbar} = \mu$, para $n = 0$. Portanto,

$$\int \frac{1}{c\hbar} (mc^2 + V_z) dx = - \int \left(\frac{\mu}{z} - \frac{1}{2} \right) dz = -\mu \ln z + \frac{z}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi &= C_1 z^\mu e^{-z/2}, \\ \chi &= C_2 z^{-\mu} e^{z/2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Analisando o comportamento assintótico das funções na Eq. (33) vemos que

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow 0, z \rightarrow 0 \ (x \rightarrow +\infty); \quad \phi \rightarrow 0, z \rightarrow \infty \ (x \rightarrow -\infty) \\ \chi \rightarrow \infty, z \rightarrow 0 \ (x \rightarrow +\infty); \quad \chi \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty \ (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \tag{34}$$

que implica que deve ser escolhido $C_2 = 0$. Então, o estado de energia zero existe e tem a forma

$$\psi_0 = N_0 z^\mu e^{-z/2} \left(\frac{1}{0} \right), \tag{35}$$

onde N_0 é o fator de normalização.

A existência do estado de energia zero da equação de Dirac em 1+1 dimensões unicamente com o potencial escalar implica que o número fermiônico do sistema considerado é fracional [19]. O número fermiônico é determinado como (por exemplo, [19])

$$N_V = -\frac{1}{2} \left[\sum_{\epsilon_n \geq 0} 1 - \sum_{\epsilon_n < 0} 1 \right], \tag{36}$$

Se o vácuo é determinado como o estado com a energia zero, então o número fermiônico do vácuo é $N_V = -1/2$. Levando em conta esse efeito o estado de energia zero pode ser interpretado como “a metade” da partícula, que implica a condição de normalização do estado de energia zero

$$\int \psi_0^\dagger \psi_0 dx = \frac{1}{2}, \tag{37}$$

Substituindo na Eq. (37) a forma explícita da autofunção do estado de energia zero (35) recebemos

$$N_0^2 \frac{1}{b} \int_0^\infty z^{2\mu} e^{-z} \frac{dz}{z} = N_0^2 \frac{\Gamma(2\mu)}{b} = \frac{1}{2},$$

onde foi usada a definição da função Gamma (8.310 (1) [17]). Finalmente obtemos o fator de normalização

$$N_0 = \sqrt{\frac{b}{2\Gamma(2\mu)}} \tag{38}$$

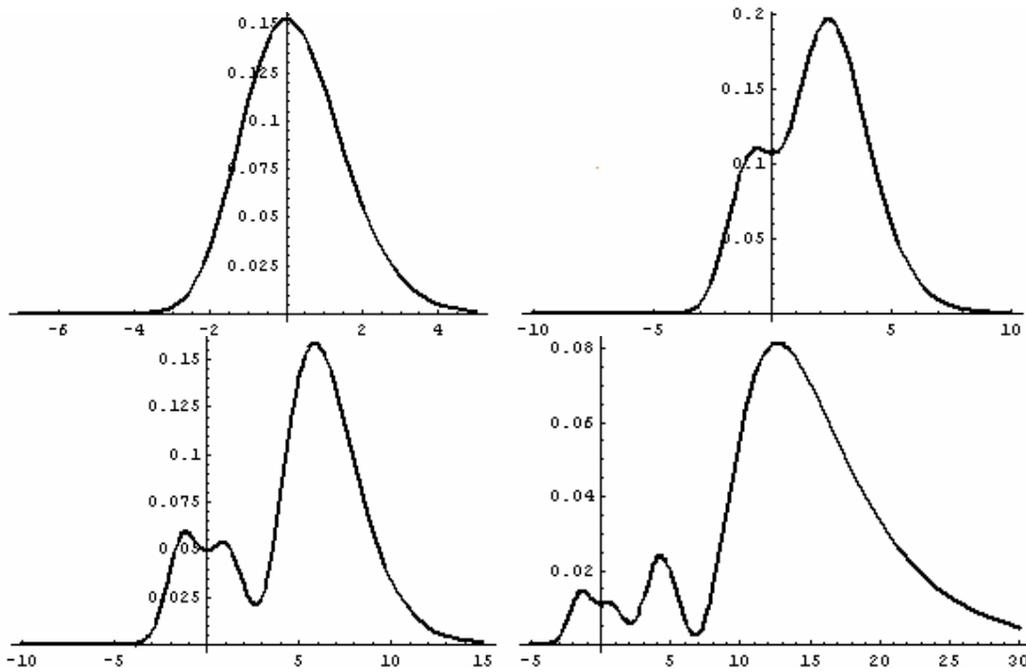


Figura 1: Densidade de probabilidade $\rho(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$; $a = -1/2$, $b = 0,3$.

4. DISCUSSÃO

Discutiremos algumas propriedades da partícula de Dirac. A densidade da probabilidade da posição da partícula é determinada como

$$\rho(x) = \psi^\dagger \psi = |\phi|^2 + |\chi|^2, \tag{39}$$

Apresentamos graficamente as distribuições de ρ para energia zero e para os primeiros estados excitados na Fig. 1. A posição mais provável da partícula (o valor máximo de ρ) para $n = 0$ (energia zero) é determinada como

$$x_m = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{|a|}{mc^2}\right), \tag{40}$$

Para os estados com $n > 0$ não é possível encontrar a expressão analítica da posição mais provável da partícula, mas o valor correspondente pode ser encontrado numericamente, resolvendo a equação transcendental com polinômios de Laguerre generalizados

$$z_m = \frac{2\mu(L_n^{2\mu}(z_m) + L_{n-1}^{2\mu}(z_m))}{L_n^{2\mu}(z_m) - (L_n^{2\mu}(z_m))' + L_{n-1}^{2\mu}(z_m) - (L_{n-1}^{2\mu}(z_m))'}, \tag{41}$$

Encontrado z_m a posição x_m é obtida da Eq. (24).

Analisamos o comportamento da distribuição da densidade da probabilidade ρ com respeito à variação dos parâmetros a e b do problema. As distribuições de ρ para vários valores do parâmetro b são representados na Fig. 2. Observemos que com decréscimo de b ocorre diminuição vertical e aumento horizontal dos gráficos de distribuições sem haver conservação da semelhança. A variação do parâmetro a do potencial leva ao deslocamento da figura da distribuição de ρ para a direita, se $|a|$ cresce, e para esquerda, se $|a|$ decresce, conservando a forma da distribuição de ρ .

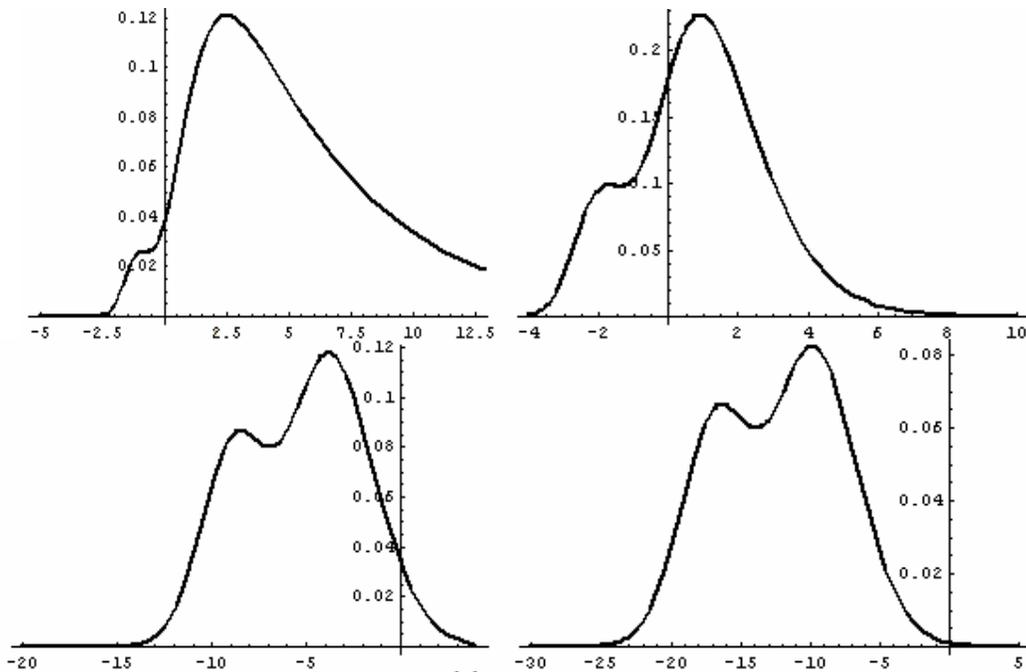


Figura 2: Densidade de probabilidade $\rho(x)$ para $b = 0,9, 1/2, 1/10, 1/20$; $n = 2, \alpha = -1/2$.

Introduzindo a quantidade – intervalo de localização Δ da partícula como um intervalo em que a partícula está localizada mais provavelmente, podendo assim descrever o comportamento da partícula de maneira mais lacônica. A partícula está localizada na vizinhança da posição x_m e o intervalo da localização da partícula não muda com a variação do parâmetro a e aumenta (diminui) com o crescimento (decrecimento) do parâmetro b . Em termos da densidade da probabilidade ρ definimos o intervalo da localização Δ da seguinte forma: determinamos a extremidade direita x_r e a extremidade esquerda x_l do intervalo como

$$\frac{\rho(x_l)}{\rho(x_m)} = \frac{\rho(x_r)}{\rho(x_m)} = e^{-\kappa}, \tag{42}$$

onde κ é um número inteiro positivo. Sendo determinadas as posições x_l e x_r o intervalo da localização seja

$$\Delta = x_r - x_l, \tag{43}$$

Nos gráficos são usadas as quantidades adimensionais (designadas nas fórmulas abaixo com barra)

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \bar{b} = b\lambda, \bar{E} = \frac{E}{mc^2}, \bar{a} = \frac{a}{mc^2}, \tag{44}$$

onde λ é o comprimento de onda Compton da partícula $\lambda = \frac{h}{mc}$,

5. APÊNDICE

5.1 Cálculo da integral

Demonstraremos o cálculo da integral

$$\int_0^\infty z^{2\mu} e^{-z} \left(L_n^{2\mu}(z) \right)^2 dz, \tag{45}$$

Utilizando a relação de polinômios de Laguerre generalizados [20]

$$L_n^{2\mu}(z) = \binom{n+2\mu}{n} - \frac{z}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_1(i)}{c_2(i)} L_i^{2\mu+1}(z) \tag{46}$$

$$c_1(i) = \binom{n+2\mu}{n-1-i}, c_2(i) = \binom{n-1}{i}$$

onde $c_1(i), c_2(i)$ são coeficientes binomiais. Representemos o termo no integrando $z^{-1} L_n^{2\mu}(z)$ como

$$z^{-1} L_n^{2\mu}(z) = z^{-1} \binom{n+2\mu}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_1(i)}{c_2(i)} L_i^{2\mu+1}(z). \tag{47}$$

Na Eq. (47) aplicamos a relação (8.974.3 [17])

$$L_i^{2\mu+1}(z) = \sum_{j=0}^i L_j^{2\mu}(z). \tag{48}$$

Então, o segundo termo no lado direito da Eq. (47) toma a forma

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_2(i)}{c_2(i)} L_i^{2\mu+1}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_2(i)}{c_2(i)} \sum_{j=0}^i L_j^{2\mu}(z) \tag{49}$$

o que leva a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \left(L_n^{2\mu}(z) \right)^2 dz \\ &= \int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \binom{n+2\mu}{n} L_n^{2\mu}(z) dz - \int_0^\infty z^{2\mu} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_2(i)}{c_2(i)} \sum_{j=0}^i L_j^{2\mu}(z) dz \end{aligned} \tag{50}$$

No segundo termo no lado esquerdo da Eq. (50) trocamos a ordem do somatório e da integração

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_2(i)}{c_2(i)} \sum_{j=0}^i \int_0^\infty z^{2\mu} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) L_j^{2\mu}(z) dz, \tag{51}$$

Na Eq. (51) todas as integrais são zero, o que é decorrente da condição para índice $j, j \neq n-1$, e da relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre generalizados

$$\int_0^\infty z^{2\mu} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) L_m^{2\mu}(z) dz = \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{n!} \delta_{nm}.$$

Então, chegamos à expressão

$$\int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \left(L_n^{2\mu}(z) \right)^2 dz = \binom{n+2\mu}{n} \int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) dz. \tag{52}$$

Na Eq. (52) utilizamos a relação [20]

$$\int_0^\infty z^{\alpha'-1} e^{-z} L_n^\alpha(z) dz = \binom{\alpha'-\alpha+n}{n} \Gamma(\alpha')$$

e a expressão dos coeficientes binomiais por meio da função Gamma

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n! \Gamma(\alpha-n+1)}, \quad \binom{n}{n} = 1$$

que leva a

$$\int_0^\infty z^{2\mu-1} e^{-z} \left(L_n^{2\mu}(z) \right)^2 dz = \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{n! \Gamma(2\mu+1)} \Gamma(2\mu) = \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{n! 2\mu}, \tag{53}$$

5.2 Ortogonalidade

De acordo com teoremas da teoria quântica [21] autofunções que correspondem a autovalores diferentes satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_k(x) dx = 0, \quad n \neq k. \tag{54}$$

Aplicando a Eq. (54) nas autofunções (28) recebemos

$$N_n N_k \int_{-\infty}^{\infty} z^{\mu+\nu-1} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) L_k^{2\nu}(z) dz + \tag{55}$$

$$N_n N_k \sqrt{\frac{2\mu+n}{n}} \sqrt{\frac{2\nu+k}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{\mu+\nu-1} e^{-z} L_{n-1}^{2\mu}(z) L_{k-1}^{2\nu}(z) dz = 0$$

onde

$$v = \frac{mc^2}{bc\hbar} - k,$$

Portanto, as integrais da Eq. (55) devem ser zero. Trocando a variável na integral concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{\mu+\nu-1} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) L_k^{2\nu}(z) dz = 0, \quad n \neq k. \tag{56}$$

A relação recebida acima junto com a relação (53) demonstra novas condições de ortonormalidade para polinômios de Laguerre que podem ser formuladas de maneira compacta como

$$\int_0^\infty z^{\mu+\nu-1} e^{-z} L_n^{2\mu}(z) L_k^{2\nu}(z) dz = \frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{n! 2\mu} \delta_{kn} \tag{57}$$

$$\mu = M = n > 0, \quad \nu = M = k > 0,$$

onde δ_{kn} é o símbolo de Kronecker.

-
1. I. R. Lapidus, One-and two-dimensional hydrogen atoms, Am. J. Phys. 49, 807(1981).
 2. I. R. Lapidus, Relativistic One-dimensional hydrogen atom, Am. J. Phys. 51, 1036-1038(1983).
 3. H. N. Spector and J. Lee, Relativistic one-dimensional hydrogen atom, Am. J. Phys. 53, 248-251(1985).

4. R. E. Moss, The hydrogen atom in one dimension, *Am. J. Phys.* 55, 397-401 (1987).
5. H. Galic, Fun and frustration with hydrogen in a 1+1 dimension, *Am. J. Phys.* 56, 312 (1988).
6. F. Domínguez-Adame, A. Rodríguez, A one-dimensional relativistic screened Coulomb potencial, *Physics Letters A* 198, 275-278 (1995).
7. F. M. Saradzhev, The bound state problem for a Dirac particle in an external static charge distribution in (1+1) dimensions, *J. Phys. A* 34, 1771-1783 (2001).
8. L. Gonzalez-Diaz, V. M. Villalba, Resonances in the one-dimensional Dirac equation in the presence of a point interaction and a constant electric field, *Phys. Lett. A* 352, 202-205 (2006); hep-th/0512073.
9. R. S. Bhalerao, B. Ram, Fun and frustration with quarkonium in a 1+1 dimension, *Am. J. Phys.* 69, 817 (2001).
10. A. S. de Castro, *Am. J. Phys.* 70, 450 (2002); R. M. Cavalcanti, *Am. J. Phys.* 70, 451 (2002).
11. John R. Hiller, Solution of the one-dimensional Dirac equation with a linear scalar potential, *Am. J. Phys.* 70, 522 (2002); quant-ph/0111011.
12. Y. Nogami, F. M. Toyama, W. van Dijk, The Dirac equation with a confining potential, *Am. J. Phys.* 71, 950 (2003).
13. A. Smirnov, Relativistic particles subject to the straight line scalar potential in one-dimensional world, *Scientia Plena* 4, 114814 (2008).
14. A. S. de Castro, Exact solution for fermion in the background of a scalar inversely linear potential, *Phys. Lett. A* 328, 289-298 (2004); hep-th/0406067.
15. A. S. de Castro, M. B. Hott, Exact closed-form solution of the Dirac equation with a scalar exponential potential, *Phys. Lett. A* 342, 53-59 (2005); hep-th/0409216.
16. Bagrov V. G., Gitman D. M., *Exact solutions of relativistic wave equations*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
17. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press Elsevier, 2007.
18. x3. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, V. 2, McGraw-Hill Book Co., 1987.
19. C. L.Ho, V. R. Khalilov, Fractional fermion number in a (1+1) dimensional Dirac equation with a scalar Coulomb field, *Phs. Rev. D* 63, 027701 (2 pages) (2000).
20. http://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials
21. A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Unabridged Dover, 1999.