SCIENTIA PLENA **VOL. 4, NUM. 11** **2008**
www.scientiaplena.org.br

Espaço-tempo não comutativo e o quantum de área

W. F. Chagas Filho & G. M. A. Almeida

Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

wfilho@fisica.ufs.br

(Recebido em 18 de julho de 2008; aceito em 26 de agosto de 2008)

Na teoria de gravitação de Einstein, o conceito de força é substituído pelo conceito de geometria. Assim, podemos esperar que a teoria quântica da gravitação nos leve naturalmente à quantização de algumas quantidades geométricas, como por exemplo, a quantização de uma área. Recentemente foi demonstrado que no espaço-tempo não comutativo de Snyder, a área de uma esfera é quantizada. Neste trabalho mostraremos como podemos induzir o aparecimento do espaço-tempo de Snyder em teoria de partícula relativística sem massa, que é a teoria de gravitação mais simples possível.
Palavras-chave: área quantizada, espaço-tempo de Snyder, partícula sem massa.

In Einstein´s theory of gravitation, the concept of force is replaced by the concept of geometry. Then, we may expect that the quantum theory naturally lead us to the quantization of some geometric quantities like, for example, the quantization of an area. Recently, it was demonstrated that in non-commutative Snyder space, the area of the sphere is quantized. In this paper, we show how we can induce the Snyder space-time appearance in massless relativistic particle theory which is the most simple gravitation theory as possible.
Keywords: quantized area, Snyder space-time, massless particle.

---

1. INTRODUÇÃO

Na teoria de gravitação Newtoniana, a trajetória de uma partícula encurva-se como conseqüência da ação de uma força que age sobre a partícula. Na ausência de forças, a trajetória da partícula é uma reta.

Na teoria de gravitação de Einstein, o conceito de força é substituído pelo conceito de geometria. Assim, a trajetória da partícula encurva-se por que a geometria é curva. Existem sinais de que a teoria de gravitação quântica correta deve implicar na quantização de algumas quantidades geométricas, como, por exemplo, a quantização de uma área. Isto nos leva ao conceito de quantum de área.

Pode ser demonstrado que a área do horizonte de eventos de um buraco negro possui um espectro discreto. Como esta área é proporcional à entropia do buraco negro, Bekenstein propôs que a área é dada por

$$A_n = 4\pi r^2 = \gamma \ell_P^2 n \tag{1}$$

$n = 1,2,3,\ldots$, γ é uma constante de proporcionalidade e ℓ_P é o comprimento de Planck, $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$. A área (1) é essencialmente a área de uma esfera de raio *r*.

Recentemente foi demonstrado que no espaço-tempo não comutativo de Snyder, a área de um disco e de uma esfera são quantizadas. O espaço de Snyder é definido em um universo do tipo de Sitter através dos comutadores

$$[p_\mu, p_\nu] = 0 \tag{2.a}$$

$$[x_\mu, p_\nu] = i\hbar(\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \tag{2.b}$$

$$[x_\mu, x_\nu] = -i\hbar L_{\mu\nu} \tag{2.c}$$

x_μ, $\mu = 0,1,\dots,d-1$ são os operadores de posição, p_μ são os operadores de momento, d é a dimensão do universo de de Sitter, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e

$$L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \tag{3}$$

é o gerador das transformações de Lorentz. O comutador (2.c) implica que o espaço-tempo é não comutativo.

Neste trabalho demonstraremos como o espaço de Snyder pode ser construído utilizando uma simetria local da Hamiltoniana que descreve uma partícula relativística sem massa propagando-se num espaço-tempo de Minkowski com d dimensões.

2. PARTÍCULAS SEM MASSA E O ESPAÇO DE SNYDER

Uma partícula relativística sem massa é descrita classicamente pelo funcional da ação

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \lambda^{-1}\dot{x}^2 \tag{4}$$

onde $x^\mu = x^\mu(\tau)$, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$, $\dot{x}^2 = \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\eta_{\mu\nu}$ e $\lambda(\tau)$ é um campo auxiliar associado à invariância da ação (4) sob as re-parametrizações

$$\delta x^\mu = \epsilon(\tau)\dot{x}^\mu \qquad \delta\lambda = \frac{d}{d\tau}(\epsilon\lambda) \tag{5}$$

quando $\tau \to \tau + \epsilon(\tau)$. A ação (4) descreve uma teoria gravitacional sobre a linha de universo da partícula. Na transição para o formalismo Hamiltoniano, a ação (4) fornece o momento canônico

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{\lambda}\dot{x}_\mu \tag{6}$$

e a Hamiltoniana canônica

$$H = \frac{1}{2}\lambda p^2 \tag{7}$$

O campo gravitacional, visto como um campo de gauge, está associado à invariância da teoria sob uma transformação de escala que depende do valor do parâmetro τ. Em conseqüência disto, a Hamiltoniana (7) também é invariante sob a transformação de escala

$$p_\mu \to \exp\{-\beta(x,p)\}p_\mu \tag{8.a}$$

$$\lambda \to \exp\{2\beta(x,p)\}\lambda \tag{8.b}$$

e da equação (6) vemos que a transformação correta para x_μ é

$$x_\mu \to \exp\{\beta(x,p)\}x_\mu \tag{8.c}$$

Se introduzirmos agora os parênteses de Poisson

$$\{p_\mu, p_\nu\} = 0 \qquad \{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu} \qquad \{x_\mu, x_\nu\} = 0 \tag{9}$$

vemos que após a transformação (8), estes se comportam como

$$\{p_\mu, p_\nu\} = (\beta - 1)[\{p_\mu, \beta\}p_\nu + p_\mu\{\beta, p_\nu\}] + \{\beta, \beta\}p_\mu p_\nu \qquad (10.a)$$
$$\{x_\mu, p_\nu\} = (1+\beta)[\eta_{\mu\nu}(1-\beta) - \{x_\mu, \beta\}p_\nu] + (1-\beta)x_\mu\{\beta, p_\nu\} - \{\beta, \beta\}x_\mu p_\nu \qquad (10.b)$$
$$\{x_\mu, x_\nu\} = (1+\beta)[x_\mu\{\beta, x_\nu\} - x_\nu\{\beta, x_\mu\}] + \{\beta, \beta\}x_\mu x_\nu \qquad (10.c)$$

Como $\beta(x,p)$ é uma função arbitrária, podemos escolher $\beta = \frac{1}{2}p^2$. Para esta escolha, os parênteses (10) se transformam em

$$\{p_\mu, p_\nu\} = 0 \qquad (11.a)$$
$$\{x_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \qquad (11.b)$$
$$\{x_\mu, x_\nu\} = -L_{\mu\nu} \qquad (11.c)$$

Se agora fizermos uma transição para a mecânica quântica usando o princípio da correspondência

$$[comutador] = i\hbar\{parênteses\} \qquad (12)$$

os parênteses (11) reproduzem os comutadores de Snyder (2).

3. EQUACÕES DE MOVIMENTO

A dinâmica Hamiltoniana da partícula relativística sem massa é descrita pelas equações de movimento

$$\dot{x}_\mu = \{x_\mu, H\} = \lambda p_\mu \qquad (13.a)$$

$$\dot{p}_\mu = \{p_\mu, H\} = 0 \qquad (13.b)$$

calculadas usando os parênteses de Poisson (9). Da equação (11.b) vemos que o campo gravitacional no espaço de Snyder é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu \qquad (14)$$

É fácil verificar que as equações de movimento (13) não variam se passarmos para o campo gravitacional (14) e utilizarmos os parênteses (11) no lugar dos parênteses (9). Embora as equações de movimento sejam invariantes de escala ao nível clássico, isto não é necessariamente válido ao nível quântico.

4. CONCLUSÃO

Os parênteses de Poisson (9) definem uma álgebra simplética no espaço de fase (x_μ, p_μ). Entretanto, os parênteses (11) que obtivemos neste trabalho mostram que a introdução dos efeitos gravitacionais necessariamente levam a uma deformação da álgebra simplética e esta deformação persiste na teoria quantizada.

1. BEKENSTEIN, J. D. Black Holes and Entropy. *Physics Review*, D 7, 2333 (1973).
2. SNYDER, H. S. Quantized Space-Time. *Physics Review*, 71, 38 (1947).
3. ROMERO, J. M.; ZAMORA, A. The Area Quantum and Snyder Space. *arXiv:hep-th*, 0802.1250 (2008).
4. CHAGAS FILHO, W. F. 2T Physics, Scale Invariance and Topological Vector Fields. *International Journal of Theoretical Physics*, 47, 1571 (2008). *arXiv:hep-th*, 0706.0532 (2007).
5. CHAGAS FILHO, W. F. 2T Physics and Quantum Mechanics. *arXiv:hep-th*, 0802.2840 (2008).