



# Identificação de danos estruturais empregando modelos de funções exponenciais, transformação integral e inferência Bayesiana

Structural damage identification using exponential function models, integral transform and Bayesian inference

R. P. de Andrade; L. T. Stutz\* ; D. C. Knupp

*Pós-Graduação em Modelagem Computacional/Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 28625-570, Nova Friburgo-RJ, Brasil*

*\*ltstutz@iprj.uerj.br*

*(Recebido em 10 de março de 2023; aceito em 16 de agosto de 2023)*

---

O presente trabalho aborda o problema inverso de identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli. No modelo direto, o campo de dano estrutural é descrito de forma contínua por funções de base exponenciais e a resposta dinâmica do modelo é obtida por meio de uma solução híbrida (analítica-numérica) fornecida pela Transformada Integral Generalizada. O problema inverso de identificação de danos é formulado segundo a inferência Bayesiana e o método Transitional Markov Chain Monte Carlo é utilizado para a amostragem da função densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros incertos que descrevem o campo de dano. A verificação da metodologia proposta é feita a partir de simulações numéricas considerando uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada de modo que três cenários de dano distintos são analisados.

Palavras-chave: identificação de danos, inferência bayesiana, transformada integral generalizada.

The present work addresses the inverse problem of structural damage identification in an Euler-Bernoulli beam. The structural damage field in the direct model is continually described by exponential basis functions and the model's dynamic response is obtained through a hybrid solution (analytical-numerical) provided by the Generalized Integral Transform. The inverse damage identification problem is formulated according to Bayesian inference and the Transitional Markov Chain Monte Carlo method is used to sample the posterior probability density function of the uncertain parameters that describe the damage field. The verification of the proposed methodology is based on numerical simulations considering a simply supported Euler-Bernoulli beam and three different damage scenarios.

Keywords: damage identification, bayesian inference, generalized integral transform.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o monitoramento da integridade de elementos estruturais tem sido objeto de estudo por grande parte da comunidade científica, visto que danos nas estruturas podem levar a falhas catastróficas com perdas socioambientais e econômicas. Além disso, com a identificação de danos em estágios iniciais é possível reduzir os custos de manutenção, estender a vida útil dos elementos estruturais e constatar um aumento nos índices de confiabilidade das estruturas.

Muitos dos métodos de identificação de danos estruturais presentes na literatura são baseados em respostas dinâmicas. Estes métodos se baseiam no fato de que a presença de danos afeta as propriedades físicas e/ou geométricas das estruturas. A medição dessas propriedades pode ser feita a partir de um ensaio experimental realizado na estrutura supostamente danificada e utilizada para inferir sobre a sua integridade [1, 2].

O problema de identificação de danos é, em geral, formulado como um problema inverso de estimação de parâmetros, isto é, o dano estrutural é estimado a partir de respostas previstas de um modelo computacional correspondente às respostas medidas em um ensaio experimental de uma estrutura supostamente danificada. Para isso, a maioria das abordagens de identificação de danos considera um modelo de elementos finitos (MEF) [1-5]. No entanto, a utilização de um modelo baseado no MEF requer um elevado número de graus de liberdade para a descrição acurada do comportamento dinâmico da estrutura, resultando em um elevado custo computacional.

Uma alternativa à utilização do MEF da estrutura é considerar a resposta estrutural fornecida pela Técnica da Transformada Integral Generalizada (*Generalized Integral Transform Technique* - GITT). A GITT fornece uma resposta híbrida (analítica-numérica) do modelo contínuo no espaço, com elevada acurácia, rápida convergência e sem a necessidade de uma discretização do domínio espacial da estrutura. Na GITT, a resposta do modelo é aproximada por meio de uma expansão em série de autofunções, obtidas a partir de uma versão homogênea da equação de movimento do sistema, e o número de termos necessários para a expansão é geralmente muito menor do que o número de elementos finitos que seriam necessários para atingir o mesmo nível de acurácia na descrição da resposta [6-9].

Recentemente a formulação de problemas inversos, em especial de problemas de identificação de danos estruturais, no contexto da inferência Bayesiana tem atraído a atenção da comunidade científica. A inferência Bayesiana fornece uma abordagem probabilística robusta para a formulação de problemas de estimativa de parâmetros, uma vez que leva em consideração tanto erros de medição quanto erros de modelagem. No contexto Bayesiano, os parâmetros do modelo que descrevem o campo de dano são considerados variáveis aleatórias e a solução do problema inverso de identificação de danos consiste na inferência da densidade de probabilidade *a posteriori* desses parâmetros [3, 10, 11].

Na prática, a densidade de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros incertos do modelo é analiticamente intratável, de modo que, para a sua inferência, geralmente se recorre a métodos de amostragem. Diferentes métodos de amostragem podem ser encontrados na literatura, como, por exemplo, o Método de Metropolis-Hastings [10], o método de Monte Carlo Hamiltoniano [12] e o Transitional Markov Chain Monte Carlo (TMCMC) [13-15], dentre outros.

O presente trabalho aborda o problema inverso de identificação de danos estruturais formulado no contexto da inferência Bayesiana. No modelo direto adotado, o campo de dano estrutural é descrito de forma contínua por funções de base de forma exponencial. O problema inverso é formulado no domínio do tempo, considerando-se a resposta dinâmica da estrutura obtida a partir da GITT. O método TMCMC é utilizado para a amostragem da densidade de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros que descrevem o dano estrutural. Uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada e três campos de danos distintos são considerados na avaliação numérica da abordagem proposta.

## 2. MODELAGEM DO PROBLEMA DIRETO

O presente trabalho considera o problema de identificação de danos estruturais em uma viga com as hipóteses de Euler-Bernoulli e amortecimento viscoso conforme apresentado na Figura 1.

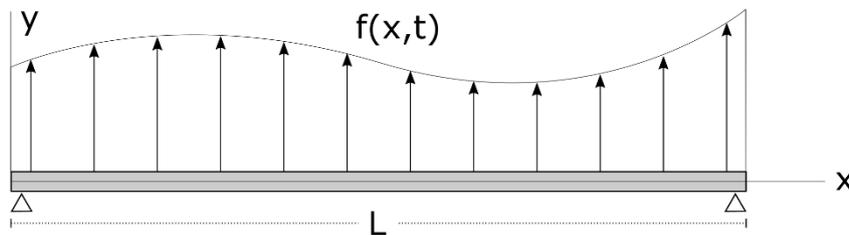


Figura 1: Viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento  $f(x,t)$  arbitrário.

O comportamento dinâmico do sistema neste caso é governado pela seguinte equação diferencial parcial [16]

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (1)$$

onde  $y(x,t)$  é o deslocamento transversal da linha neutra da viga, na posição  $x$  e no instante de tempo  $t$ ,  $\rho$  é a massa específica,  $A$  é a área da seção transversal,  $d$  é o coeficiente de

amortecimento viscoso,  $E(x)$  é o módulo de elasticidade,  $I(x)$  é o momento de inércia de área da seção transversal e  $f(x, t)$  representa o carregamento transversal externo por unidade de comprimento.

A rigidez à flexão da viga pode ser definida como

$$E(x)I(x) = \beta(x)E_0I_0 \quad (2)$$

onde  $\beta(x)$  é um parâmetro de coesão,  $E_0$  é o módulo de elasticidade nominal e  $I_0$  é o momento de inércia de área nominal da viga. De acordo com a Eq. (2), o parâmetro de coesão  $\beta(x)$  relaciona, em uma determinada posição, a rigidez nominal à flexão da viga com a rigidez real e, portanto, é um parâmetro relacionado à integridade estrutural. O campo de dano da estrutura, por sua vez, pode ser definido como

$$D(x) = 1 - \beta(x) \quad (3)$$

Portanto, na ausência de danos estruturais, idealmente, tem-se  $D(x) = 0$ .

Desse modo, substituindo a Eq. (3) em (2) e posteriormente em (1), a equação de movimento do sistema pode ser reescrita como

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + d \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + E_0 I_0 \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) + f_D(x, t) \quad (4)$$

onde

$$f_D(x, t) = E_0 I_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right] \quad (5)$$

representa um carregamento fictício, por unidade de comprimento, relacionado à presença de danos estruturais. No caso de ausência de danos, tem-se  $f_D(x, t) = 0$  e a Eq. (4) se reduz a equação de movimento de uma viga homogênea não danificada.

Sem perda de generalidade, o presente artigo considerou uma viga simplesmente apoiada, com condições iniciais nulas e com seção transversal retangular.

## 2.1 Transformada Integral Generalizada

A solução da equação de movimento em (4) será obtida a partir da GITT. Nesta técnica, a resposta do sistema é definida como uma expansão de autofunções na forma [6, 7]

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \eta_i(t) \quad (6)$$

onde  $\phi_i(x)$  é a autofunção que representa a  $i$ -ésima forma modal e  $\eta_i(t)$  é a correspondente coordenada modal, relacionadas ao sistema homogêneo governado pela Eq. (4). As formas modais são obtidas ao se resolver o problema de autovalor-autofunção associado à versão homogênea e não amortecida da Eq. (4), onde os autovalores representam as frequências naturais ( $\omega_i$ ) ao quadrado do correspondente modo de vibração. A solução desse problema pode ser obtida analiticamente para os casos de condições de contorno clássicas e algumas delas podem ser encontradas em Meirovitch (1986) [16].

Como as formas modais são ortogonais entre si e podem ser normalizadas com respeito à distribuição de massa do sistema, substituindo a Eq. (6) na Eq. (4), e aplicando o operador integral

$$I = \int_0^L \phi_j(x) \cdot dx \quad (7)$$

obtem-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias para as coordenadas modais do sistema dado por [6]

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \omega_i^2u_i(t) + \omega_i^2u_{Di}(t) \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

onde

$$u_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^L \phi_i(x) f(x, t) dx \quad (9)$$

e

$$u_{Di}(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^L \phi_i(x) f_D(x, t) dx \quad (10)$$

são as excitações modais relacionadas, respectivamente, ao carregamento externo  $f(x, t)$  e ao carregamento fictício  $f_D(x, t)$  e  $\zeta_i$  é a razão de amortecimento do  $i$ -ésimo modo de vibração.

No caso em que não há dano na estrutura,  $u_{Di}(t) = 0$ , a Eq.(8) representa um sistema de equações diferenciais ordinárias desacopladas, ao passo que quando há dano, o sistema se torna acoplado e sua solução é obtida por métodos numéricos.

Por questões práticas e computacionais, a solução fornecida pela Eq. (6) é aproximada pelo truncamento da série em  $N_{tr}$  termos.

## 2.2 Campo de dano

A solução do problema direto depende do modelo de dano adotado. Em Cordeiro et al. (2022) [6], por exemplo, foi proposto uma discretização espacial para o campo de dano estrutural, de modo que parâmetros nodais de dano, obtidos dessa discretização, eram os parâmetros utilizados para a descrição da integridade estrutural. Neste trabalho, utiliza-se um modelo de dano contínuo descrito por uma expansão a partir de funções de base exponencial [7], dada por

$$D(x) = \sum_{j=1}^{N_d} M_{dj} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - x_{dj}}{\gamma_{dj}} \right)^2 \right\} \quad (11)$$

onde  $N_d$  é o número de termos empregado na descrição do campo de danos e coincide com o número máximo de danos que o modelo pode descrever. Em cada termo  $j$  da Eq. (11),  $M_{dj}$  representa a intensidade máxima do dano,  $x_{dj}$  a posição onde ocorre a intensidade máxima e  $\gamma_{dj}$  é o parâmetro relacionado a extensão do dano correspondente.

Vale enfatizar que, como um dano estrutural é um evento localizado, para a sua descrição, o modelo de dano dado pela Eq. (11) necessita de um número de parâmetros consideravelmente menor, quando comparado a um modelo de elementos finitos.

## 3. MODELAGEM DO PROBLEMA INVERSO

De acordo com o teorema de Bayes, a densidade de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros incertos do modelo, é dada por [10]

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_e) = \frac{p(\mathbf{z}_e | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{z}_e)} \quad (12)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor contendo os parâmetros incertos do modelo, no caso os parâmetros que descrevem o campo de dano dado pela Eq. (11),  $\mathbf{z}_e$  é o vetor contendo os dados experimentais,  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_e)$  é a densidade de probabilidade *a posteriori*,  $p(\boldsymbol{\theta})$  é a densidade de probabilidade *a priori*,  $p(\mathbf{z}_e | \boldsymbol{\theta})$  é a função de verossimilhança e  $p(\mathbf{z}_e)$  é a probabilidade marginal dos dados experimentais. O uso da inferência Bayesiana é mais vantajoso em relação a métodos determinísticos pois é possível considerar explicitamente as informações *a priori* na formulação

do problema. Além disso, fornece uma densidade de probabilidade para os parâmetros do modelo que pode ser usada para se determinar propriedades estatísticas e que refletem a incerteza em relação aos parâmetros estimados.

No caso em questão, o vetor de parâmetros incertos é dado por

$$\boldsymbol{\theta} = [x_{d_1} \ M_{d_1} \ \gamma_{d_1} \ x_{d_2} \ M_{d_2} \ \gamma_{d_2} \ \dots \ x_{d_{N_d}} \ M_{d_{N_d}} \ \gamma_{d_{N_d}}]^T \quad (13)$$

e o vetor de dados experimentais, considerando a aceleração transversal da viga em posições pré-determinadas, é descrito por

$$\mathbf{z}_e = [\ddot{\mathbf{y}}_1^T \ \ddot{\mathbf{y}}_2^T \ \dots \ \ddot{\mathbf{y}}_{N_{se}}^T]^T \quad (14)$$

onde  $N_{se}$  representa o número de sensores considerados e o subíndice está relacionado à posição do sensor.

A densidade de probabilidade a *posteriori* dos parâmetros desconhecidos do modelo foi amostrada a partir do método *Transitional Markov Chain Monte Carlo* (TMCMC) [13, 14]. O TMCMC, diferentemente da maioria dos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (Markov Chain Monte Carlo - MCMC), não amostra diretamente a probabilidade a *posteriori*, definida pela Eq. (12). Ao invés disso, o método parte de um conjunto de amostras da probabilidade a *priori* e gradativamente evolui para amostras da densidade a *posteriori*, considerando densidades de probabilidade intermediárias dadas por

$$f_j(\boldsymbol{\theta}) \propto p(\mathbf{z}_e | \boldsymbol{\theta})^{q_j} p(\boldsymbol{\theta}) \quad (15)$$

onde  $q_j$  é um expoente associado à suavidade da transição entre as densidades de estágios intermediários adjacentes, de modo que  $q_j \in [0,1]$  para  $j \in \{0,1,2, \dots, N_e - 1\}$  com  $N_e$  sendo o número total de estágios.

Os estágios intermediários são determinados por um processo de reamostragem. Inicialmente, determina-se a suavidade da transição  $q_j$  e o vetor de plausibilidades  $\mathbf{w}_j = f_j(\boldsymbol{\theta})/f_{j-1}(\boldsymbol{\theta})$  do novo estágio. A cada nova amostra é gerado uma cadeia de Markov por meio de um movimento de Metropolis-Hastings, com o auxílio de uma distribuição normal centrada em uma amostra aleatória do estágio corrente, selecionada a partir da sua plausibilidade, e com uma matriz de covariância  $V_j$  calculada a partir das amostras,

$$V_j = \alpha^2 \Sigma_j = \alpha^2 \sum_{i=1}^{N_s} \hat{w}_{j,i} (\theta_{j-1,i} - \bar{\theta}_{j-1}) (\theta_{j-1,i} - \bar{\theta}_{j-1})^T \quad (16)$$

onde  $\alpha$  é um fator de escala,  $\hat{w}_{j,i}$  é a plausibilidade normalizada da amostra  $i$  no estágio  $j$ ,  $\theta_{j-1,i}$  é a amostra  $i$  do estágio anterior e  $\bar{\theta}_{j-1}$  é a média das amostras ponderadas por  $\mathbf{w}_j$ .

O TMCMC clássico carece de algumas melhorias. Dentre elas, a principal é o ajuste da matriz de covariância pelo fator de escala  $\alpha$ , que serve para suprimir ou aumentar a taxa de aceitação das amostras. Originalmente Ching e Chen (2007) [13] sugeriram utilizar  $\alpha = 0,2$ . Por outro lado, Betz et al. (2016) [15] sugere um fator que se adapte para regularizar a taxa de aceitação e melhorar o método. Desse modo, foi utilizado um método, aqui chamado de TMCMC adaptativo, descrito pelo Algoritmo 1 em que o fator  $\alpha$  é ajustado por um modelo de *Feedback Controller*.

**Algoritmo 1 – TMCMC adaptativo**

$j = 0$	$j$ : estágio da reamostragem
$q_0 = 0$	$q_0$ : expoente do estágio 0
$ME = 1$	ME: evidência de modelo
$\alpha = 2,38/\sqrt{N_p}$	$N_p$ : n° de parâmetros
$t_{acr} = 0,21/N_p + 0,23$	$t_{acr}$ : tava de aceitação alvo
$N_a = 100$	$N_a$ : n° de reamostragens até o ajuste de $\alpha$
$n_a = 0$	$n_a$ : reamostragens feitas
$G = 2,1$	$G$ : amortecimento do <i>Feedback controller</i>
Obtenha $N_s$ amostras $\theta_0$ da distribuição a priori	
<b>Enquanto</b> $q_j \neq 1$ <b>faça</b>	
$j = j + 1$	
Determine $q_j$ baseado no CoV de $w_j = p(z_e \theta)^{q_j - q_{j-1}}$	
<b>Se</b> $q_j > 1$ <b>faça</b> $q_j = 1$	
$S_j = \text{média}(w_j)$	
$ME = S_j \times ME$	
Calcule a média das amostras $\theta_{j-1}$ ponderadas por $w_j$ , denominada $\bar{\theta}_{j-1}$	
Calcule $\Sigma_j$ com a Eq. (16)	
$\theta_j^c = \theta_{j-1}$	
<b>Para</b> $i = 1: N_s$ <b>faça</b>	
Selecione $l \in \{1, \dots, N_s\}$ aleatoriamente com probabilidade $w_j(S_j N_s)^{-1}$	
<b>Para</b> $k = 1: N_{steps}$ <b>faça</b>	
Proponha $\theta^* \sim \mathcal{N}(\theta_{j,l}^c, \alpha^2 \Sigma_j)$	Movimento de MH com $N_{steps}$
Calcule $r = p(\theta^* z_e)/p(\theta_{j,l}^c z_e)$	
<b>Se</b> $r > u \sim \mathcal{U}(0,1)$ <b>então</b> $\theta_{j,l}^c = \theta^*$	
Atualize o vetor de plausibilidades $w_j$	
$n_a = n_a + 1$	
$\theta_{j,i} = \theta_{j,l}^c$	
<b>Se</b> $n_a \geq N_a$ <b>então</b>	
Calcule a taxa de aceitação (ACR)	Ajuste do fator $\alpha$ pelo modelo de <i>Feedback Controller</i>
Atualize $\alpha = \alpha \exp[G(ACR - t_{acr})]$	

O TMCMC estima a *posteriori* por meio de transições suaves entre os estágios, por isso é capaz de capturar densidades de probabilidade complexas mesmo que a distribuição a priori seja simples. Outra vantagem do método é a obtenção da evidência de modelo (ME) como subproduto, que pode ser usada para seleção e média de modelos [13, 14].

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações foram executadas considerando uma viga simplesmente apoiada e de seção transversal retangular. A Tabela 1 apresenta as propriedades físicas e geométricas de tal viga [3]. Os dados foram simulados com um impacto externo e um sensor localizado a mesma posição, conforme apresentado na Figura 2.

Tabela 1: Propriedades físicas e geométricas da viga

Propriedade	Valor
$L$ (comprimento)	1,46 m
$h_0$ (Altura)	0,008 m
$w$ (Largura)	0,0762 m
$E_0$ (Módulo de Elasticidade)	207 GPa
$d$ (Coeficiente de amortecimento)	10 N.s/m <sup>2</sup>
$\rho$ (Massa específica)	7850 kg/m <sup>3</sup>

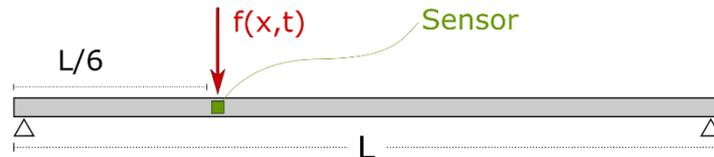


Figura 2: Localização da aplicação da força e do sensor na viga simulada.

Sem perda de generalidade, considerou-se um cenário em que o dano causa uma alteração na altura da seção transversal da viga, conforme esquematizado na Figura 3. Desse modo, assumindo que somente as propriedades geométricas são alteradas, ou seja,  $E(x) = E_0$ , e como a seção transversal é retangular, da Eq. (2) segue que o parâmetro de coesão é dado por

$$\beta(x) = \left( \frac{h(x)}{h_0} \right)^3 \quad (17)$$

onde  $h(x)$  é a altura da viga no ponto  $x$  e  $h_0$  a altura nominal da viga sem dano.

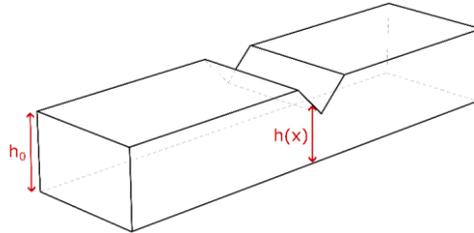


Figura 3: Viga com uma representação de dano.

Os três cenários de dano simulados podem ser encontrados na Tabela 2. Em todos os casos, foi considerado uma altura relativa da viga de 90% na posição de maior intensidade de dano. O pico de intensidade do dano,  $M_d$ , é determinado a partir das Eqs. (17), (11) e (3). O caso 1A possui uma extensão de dano de 12 cm e difere do caso 1B que possui 1,2 cm de região danificada. O caso 2 simula um cenário em que há duas regiões de dano na viga.

Tabela 2: Casos de dano estudados.

Caso	$x_d$ (m)	$M_d$	$\gamma_d$ (m)
1A	0,5475	0,2710	0,020
1B	0,5475	0,2710	0,002
2	0,5475 1,2775	0,2710	0,020

O trabalho busca uma avaliação inicial da aplicabilidade do método e por isso os dados experimentais sintéticos foram gerados com o mesmo modelo usado para o processo de inversão.

A resposta de aceleração transversal da viga foi determinada com os primeiros 5 modos de vibração e uma excitação dada por

$$f(x, t) = \begin{cases} \delta(x - x_f)F \sin\left(\frac{\pi}{dt}t\right) & \text{se } 0 \leq t \leq dt \\ 0 & \text{se } t > dt \end{cases} \quad (18)$$

que simula um impacto, onde  $x_f$  é o ponto de aplicação da força,  $F$  a intensidade e  $dt$  a duração do pulso. Os parâmetros utilizados foram  $x_f = 0,2433$  m,  $F = 315$  N e  $dt = 0,005$  s.

A taxa de amostragem dos dados foi de 1000 Hz e utilizou-se os primeiros 500ms de resposta para a inferência dos parâmetros de dano. A contaminação dos dados foi realizada com um ruído aditivo com distribuição normal de média zero e variância determinada por uma razão-sinal-ruído (SNR) de 20 dB em 10s de resposta. Os dados experimentais dos 10s de resposta para cada caso estão apresentados na Figura 4.

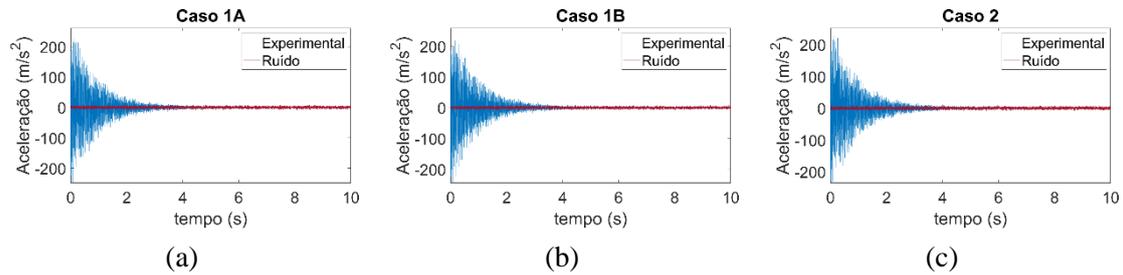


Figura 4: Dados experimentais sintéticos da aceleração da viga em  $x_s=0,2433$  m. Em (a) o caso 1A, em (b) o caso 2B e em (c) o caso 2.

A solução do problema inverso foi realizada com 5000 amostras por estágio do TCMCMC e cinco passos de Metropolis-Hastings. A distribuição *a priori* de cada parâmetro foi considerada uniforme e com suportes definidos da seguinte maneira:

- A locação ( $x_d$ ) do dano pode ocorrer em qualquer posição em 80% da região central da viga. A viga está simplesmente apoiada, o que implica em baixa tensão nos extremos. Desse modo,  $x_d \in [0,1L; 0,9L]$ ;
- A intensidade ( $M_d$ ) máxima do dano é referente a uma altura relativa da viga de 75%, pois o interesse é de encontrar danos nos estágios iniciais. Assim,  $M_d \in [0; 0,578]$ ;
- A extensão ( $\gamma_d$ ) do dano pode afetar uma região de até 15 cm, logo  $\gamma_d \in [0; 0,025]$ .

Os resultados estão apresentados de forma resumida na Tabela 3 com a média e o desvio padrão dos parâmetros de dano. A quantidade de regiões danificada, bem como o tamanho da extensão dos danos interferiu na precisão dos resultados, mas em todos os casos o método foi capaz de capturar ao menos a localização dos danos.

Tabela 3: Média e desvio padrão dos parâmetros de dano estimados em cada caso.

Parâmetro	Caso 1A		Caso 1B		Caso 2	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
$x_{d1}$	0,5473	0,0003	0,5500	0,0163	0,5463	0,0013
$M_{d1}$	0,2767	0,0087	0,1853	0,1180	0,3352	0,0752
$\gamma_{d1}$	0,0196	0,0006	0,0048	0,0037	0,0166	0,0034
$x_{d2}$					1,2765	0,0014
$M_{d2}$	--		--		0,2904	0,0681
$\gamma_{d2}$					0,0197	0,0038

A Figura 5 apresenta os histogramas da densidade *a posteriori* de cada parâmetro do caso 1A e a Figura 6 apresenta a altura relativa da viga com um envelope de intervalo de credibilidade de 95%. Neste cenário, observa-se que o método foi capaz de capturar com elevada precisão e acurácia o perfil da região danificada.

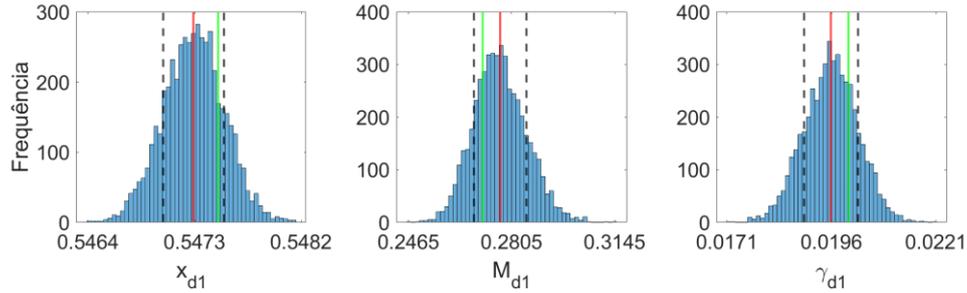


Figura 5: Histograma dos parâmetros de dano do caso 1A. Em vermelho a média, verde o valor exato e tracejado o desvio padrão.

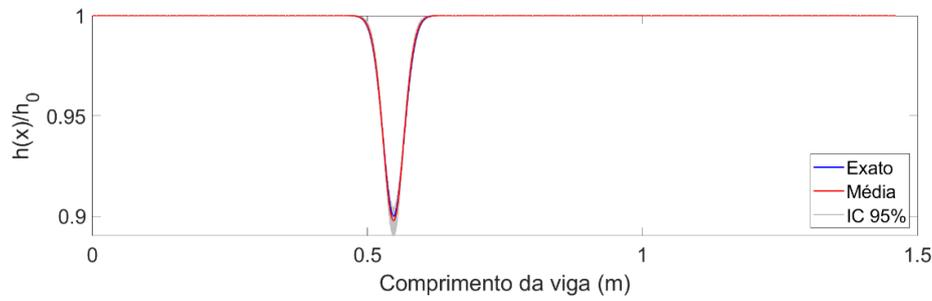


Figura 6: Altura relativa da viga no caso 1A.

Por sua vez, a Figura 7 apresenta as densidades *a posteriori* para o caso 1B e a Figura 8 a altura relativa da viga. Nesta situação, os parâmetros relacionados com a intensidade e com a extensão apresentaram maior incerteza. Ainda assim, o método foi capaz apontar um possível local danificado. A maior dificuldade talvez seja explicada porque danos desse tipo afetam mais a resposta da viga na região de alta frequência, o que pode ser contornado com mais termos no truncamento da Eq. (6) e uma maior taxa de amostragem. Por outro lado, observa-se que não foi necessário aumentar o número de parâmetros no problema inverso, ao contrário do que aconteceria no método de elementos finitos que necessita de malhas mais refinadas para problemas com danos concentrados.

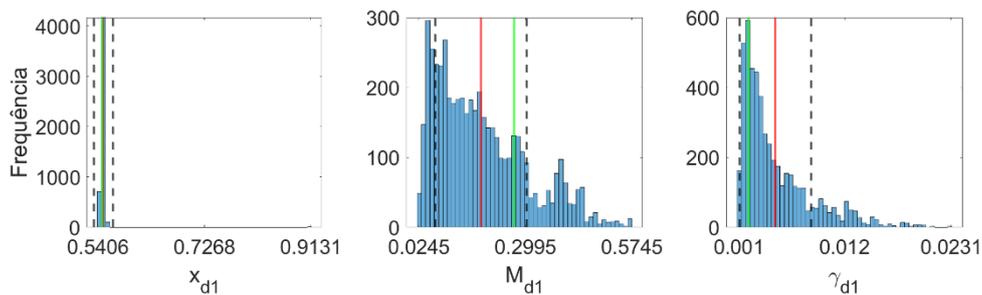


Figura 7: Histograma dos parâmetros de dano do caso 1B. Em vermelho a média, verde o valor exato e tracejado o desvio padrão.

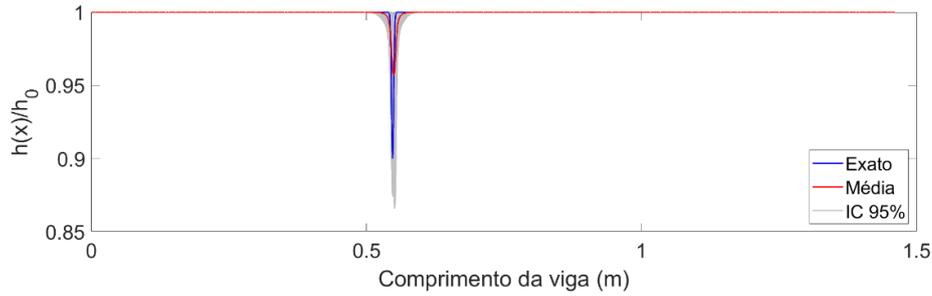


Figura 8: Altura relativa da viga caso 1B.

Por fim, foi analisada a capacidade do método de capturar mais de um dano na viga, conforme exibido pelos histogramas das Figuras 9 e 10. A partir da altura relativa, Figura 11, observa-se que os parâmetros tendem a se compensar mais para ajustar os dados, o que reflete em um maior intervalo de credibilidade, mas capturam bem em média as regiões de dano. Isso leva a crer que mais sensores e dados poderiam melhorar a qualidade de ajuste do método.

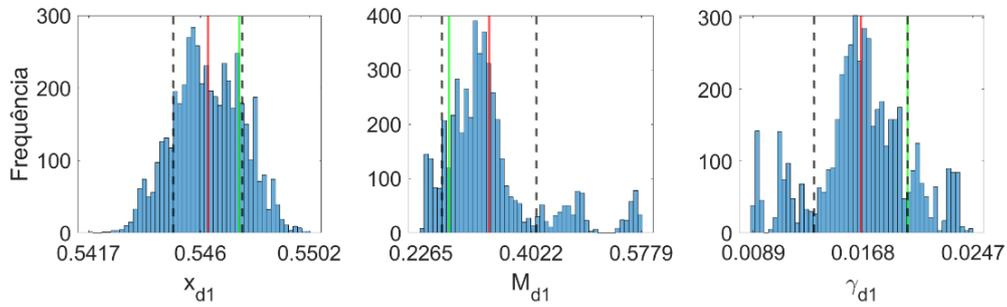


Figura 9: Histograma dos parâmetros da primeira região de dano do caso 1B. Em vermelho a média, verde o valor exato e tracejado o desvio padrão.

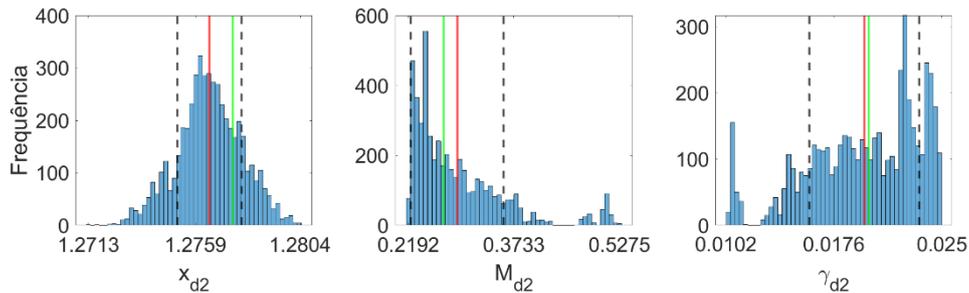


Figura 10: Histograma dos parâmetros da segunda região de dano do caso 1B. Em vermelho a média, verde o valor exato e tracejado o desvio padrão.

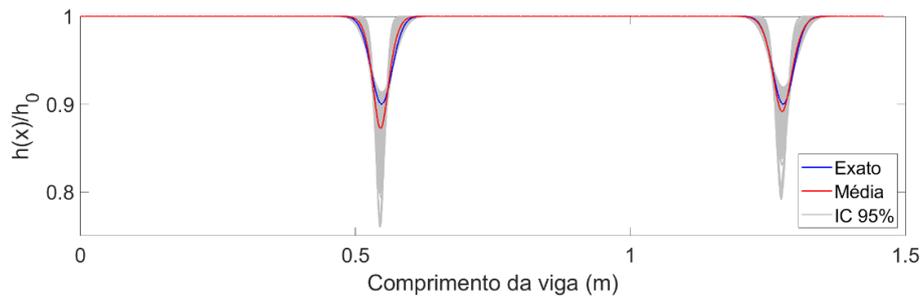


Figura 11: Altura relativa da viga caso 2.

Apesar do método identificar os danos em todos os casos, isso só foi possível por saber de antemão a quantidade exata de regiões danificadas a ser utilizada na Eq. (11). Tal informação não costuma ser conhecida, o que denota uma falha do método. Por outro lado, a utilização do TMCMC não só fornece uma inferência sobre os parâmetros do modelo, como também uma estimativa da evidência (verossimilhança marginal) do modelo que é fundamental na seleção de modelos bayesiana e pode ser usada para contornar esse problema. Além disso, a evidência de modelo pode ser usada na determinação da resposta do sistema considerando todos os modelos plausíveis disponíveis (*model averaging*).

## 5. CONCLUSÃO

A combinação da GITT com o TMCMC adaptativo apresentou bons resultados em todos os cenários considerados. Em especial, no caso 1B foi possível identificar uma região danificada dez vezes mais concentrada sem a necessidade de aumentar a quantidade de parâmetros estimados no problema inverso, o que denota uma grande vantagem em relação ao MEF.

A desvantagem do método empregado no trabalho está em ter que conhecer de antemão a quantidade de danos esperados na estrutura. Entretanto, o método de amostragem utilizado fornece como subproduto a evidência de modelo que pode ser usada para realizar a seleção de modelos e contornar esse problema. Desse modo, as próximas etapas do projeto concentram-se em implementar esta análise e determinar os parâmetros das regiões danificadas bem como a quantidade provável de danos.

## 6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Também é reconhecido o apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Alvandi A, Cremona C. Assessment of vibration-based damage identification techniques. *J Sound Vib.* 2006 Abr;229(1-2):179-202. doi: 10.1016/j.jsv.2005.07.036
2. Zhang C, Cheng L, Qiu J, Ji H, Ji J. Structural damage detections based on a general vibration model identification approach. *Mech Syst Signal Process.* 2019 Mai;123:316-32. doi: 10.1016/j.ymssp.2019.01.020
3. Teixeira JS, Stutz LT, Knupp DC, Neto AJS. A new adaptive approach of the Metropolis-Hastings algorithm applied to structural damage identification using time domain data. *Appl Math Model.* 2020 Jun;82:587-606. doi: 10.1016/j.apm.2020.01.021
4. Huhtala A, Bossuyt S. A Bayesian approach to vibration based structural health monitoring with experimental verification. *J Struct Mech.* 2011;44(4):330-44.
5. Ramos LF, Roeck GD, Lourenco PB, Campos-Costa A. Damage identification on arched masonry structures using ambient and random impact vibrations. *Eng Struct.* 2010 Jan;32(1):146-62. doi: 10.1016/j.engstruct.2009.09.002
6. Cordeiro CEZ, Stutz LT, Knupp DC, Matt CFT. Generalized Integral Transform and Hamiltonian Monte Carlo for Bayesian structural damage identification. *Appl Math Model.* 2022 Abr;104:243-58. doi: 10.1016/j.apm.2021.11.026
7. Matt CFT. Combined classical and generalized integral transform approaches for the analysis of the dynamic behavior of a damaged structure. *Appl Math Model.* 2013 Out;37(18-19):8431-50. doi: 10.1016/j.apm.2013.03.068
8. Zhang J, Ullah S, Zhong Y. New analytical free vibration solutions of orthotropic rectangular thin plates using generalized integral transformation. *J Comput Appl Math.* 2020 Mar;367:112439. doi: 10.1016/j.cam.2019.112439
9. Gu J, An C, Duan M, Levi C, Su J. Integral transform solutions of dynamic response of a clamped-clamped pipe conveying fluid. *Nucl Eng Des.* 2013 Jan;254:237-45. doi: 10.1016/j.nucengdes.2012.09.018

10. Kaipio J, Somersalo E. *Statistical and computational inverse problems*. 1. ed. New York (US): Springer-Verlag; 2005.
11. Huang Y, Shao C, Wu B, Beck JL, Li H. State-of-the-art review on Bayesian inference in structural system identification and damage assessment. *Adv Struct Eng*. 2018 Nov;22(6):1329-51. doi: 10.1177/1369433218811540
12. Cheung SH, Beck JL. Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters. *J Eng Mech*. 2009 Abr;135(4):243-55. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:4(243)
13. Ching J, Chen YC. Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model updating, model class selection, and model averaging. *J Eng Mech*. 2007 Jul;133(7):816-32. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:7(816)
14. Ching J, Wang JS. Application of the Transitional Markov Chain Monte Carlo algorithm to probabilistic site characterization. *Eng Geol*. 2016 Mar;203:151-67. doi: 10.1016/j.enggeo.2015.10.015
15. Betz W, Papaioannou I, Straub D. Transitional Markov Chain Monte Carlo: Observations and improvements. *J Eng Mech*. 2016 Mai;142(5):04016016. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001066
16. Meirovitch L. *Elements of vibration analysis*. 2. ed. New York (US): McGraw-Hill; 1986.