



O método de escalas múltiplas aplicado a um modelo do oscilador harmônico linear regularmente perturbado

The method of multiple scales applied to a model of the regularly perturbed linear harmonic oscillator

D. M. da Silva¹; L. D. Pérez-Fernández¹; A. Molter¹; J. Bravo-Castillero²

¹Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 96001-970, Pelotas-RS, Brasil

²Unidad académica del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas en el Estado de Yucatán, Universidad Nacional Autónoma de México, 04510, Mérida-YU, México

*doumach99@gmail.com

(Recebido em 09 de março de 2023; aceito em 16 de agosto de 2023)

Métodos de perturbação têm como finalidade obter uma solução aproximada de problemas envolvendo um parâmetro pequeno $0 < \varepsilon \ll 1$. Isto é feito decompondo o problema original em uma sequência recorrente de problemas mais simples, a partir dos quais se constrói uma solução assintótica formal (SAF) do problema. No entanto, há problemas para os quais métodos tradicionais da teoria de perturbação não fornecem resultados satisfatórios. Esse fato é ilustrado aqui para o problema do oscilador harmônico linear regularmente perturbado. Para esse problema, como abordagem alternativa, emprega-se aqui o método das escalas múltiplas para construir uma SAF que é uma boa aproximação da solução exata.

Palavras-chave: oscilador harmônico linear, perturbação regular, método das escalas múltiplas.

Perturbation methods are intended to obtain an approximate solution to problems involving a small parameter $0 < \varepsilon \ll 1$. This is attained by decomposing the original problem into a recursive sequence of simpler problems, from which a formal asymptotic solution (FAS) of the problem is constructed. However, there are problems for which traditional perturbation theory methods do not provide satisfactory results. This fact is illustrated here for the regularly perturbed linear harmonic oscillator problem. For this problem, as an alternative approach, the method of multiple scales is employed here to construct a FAS that is a good approximation of the exact solution.

Keywords: linear harmonic oscillator, regular perturbation, multiple scales method.

1. INTRODUÇÃO

Dentre os problemas da matemática aplicada, muitas vezes pesquisadores se deparam com situações em que encontrar a solução exata se torna um processo trabalhoso e, em certos casos, mesmo conhecida a solução exata, esta envolve uma expressão analítica complicada. Isto se mostra comum ao modelar fenômenos encontrados na natureza. Frente a isso, se faz necessário o estudo de modelos matemáticos que descrevem tais fenômenos. Neste artigo será abordado o fenômeno de oscilações lineares, muito presente na natureza, e para isso será utilizado o oscilador harmônico linear.

O oscilador harmônico linear é um importante objeto de estudos, graças às suas aplicações e fundamentação teórica. A discussão abrangente de sistemas oscilatórios lineares é garantida pela grande importância dos fenômenos oscilatórios em muitas áreas da física e da engenharia [1]. Para discutir este objeto, se faz necessário ferramentas matemáticas capazes de fornecer resultados satisfatórios em relação a obter boas aproximações para a solução do modelo. Dentre as ferramentas matemáticas que facilitam este processo está a teoria das perturbações que, segundo Nayfeh (1993) [2], é a mais importante entre as técnicas analíticas de aproximação de soluções.

Tem-se que a teoria de perturbações é definida como aproximações que utilizam de expansões em série efetuadas a partir da estrutura de equações diferenciais cujas soluções e características são conhecidas para que as soluções das equações de interesse possam ser estimadas [2]. Em outras palavras, a teoria de perturbações realiza uma decomposição de um problema em infinitos problemas cujas soluções podem ser encontradas mais facilmente.

Sobre os problemas de perturbação, estes se dividem em dois tipos: perturbação regular e perturbação singular [2]. A característica que diferencia estes tipos de problemas de perturbação é que para problemas de perturbação singular, a natureza do problema se modifica graças à presença do parâmetro de perturbação, e em problemas de perturbação regular a natureza do problema se mantém [2]. Um exemplo disto é considerar um problema de Cauchy com a presença de um parâmetro de perturbação, em que, no caso singular, este acompanha a derivada de maior ordem na equação diferencial e no caso regular, não. A presença do parâmetro de perturbação na derivada de maior ordem da equação diferencial implica no descumprimento de algumas condições de contorno e/ou iniciais do problema, já que à medida que o parâmetro se torna menor, pouca será a influência da derivada de maior ordem na equação.

Vale destacar que além de conceitos da teoria de perturbações, será utilizado o método de escalas múltiplas, dada suas vantagens frente ao problema proposto no artigo. As principais aplicações deste método são problemas de oscilações não-lineares, problemas de camada limite, dinâmica de fluidos, aerodinâmica, entre outros [3]. Uma das motivações para uso do método das escalas múltiplas, é de que na natureza existe vários fenômenos que se comportam de maneira distinta para diferentes escalas temporais, como por exemplo oscilações não-lineares. O método de escalas múltiplas permite o desacoplamento da escala temporal, afim de proporcionar uma melhor análise para cada tipo de oscilação. No entanto, este desacoplamento resulta no aparecimento dos chamados termos seculares, que são termos que implicam que as aproximações obtidas pela teoria de perturbações, descumpram certas propriedades do problema original. Mas o método de escalas múltiplas reorganiza tais termos de forma que sejam eliminados e a análise em diferentes escalas temporais seja válida [4].

Assim, o presente artigo propõe a resolução do problema do oscilador harmônico linear regularmente perturbado, para o qual mostra-se que a abordagem via método de perturbação regular não é satisfatória. Alternativamente, utiliza-se o método das escalas múltiplas. E será feita a comparação entre a solução obtida por este método e a solução exata do problema. Como referencial teórico utiliza-se também Bahkvalov e Panasenko (1989) [5], Pontriaguin (1973) [6] e Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia (1992) [7].

2. METODOLOGIA

2.1 Preliminares

Definição 1: (Símbolo de ordem O grande [5]). Sejam o intervalo $T \subset \mathbb{R}_+$, e o conjunto $E \subset \mathbb{R}_+^*$ de valores do parâmetro ε , $0 < \varepsilon \ll 1$. Seja B o espaço normado das funções $x: T \times E \rightarrow \mathbb{R}$ com lei de formação $(t, \varepsilon) \mapsto x(t, \varepsilon)$ e norma $\|x(t, \varepsilon)\|_B$ definida para cada $\varepsilon \in E$ fixo. A notação $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$, $N \in \mathbb{R}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de B , equivale a afirmar que existem constantes $A, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $\|x(t, \varepsilon)\|_B \leq A\varepsilon^N$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Definição 2: (Solução assintótica formal (SAF) [5]). Sejam os espaços normados B_1 e B_2 , a função $f \in B_2$ e o operador $L^\varepsilon: B_1 \rightarrow B_2$ para cada $\varepsilon \in E$. Seja $x^\varepsilon \in B_1$, $x^\varepsilon(t) = x(t, \varepsilon)$, a solução exata da equação

$$L^\varepsilon x^\varepsilon = f \quad (1)$$

Uma SAF da Eq. (1) é uma série infinita, não necessariamente convergente,

$$x^{(\infty)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_k(t, \varepsilon), \quad x_k \in B_1 \quad (2)$$

tal que para qualquer $N \in \mathbb{R}_+$ existe $M(N) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > M(N)$ vale a relação

$$L^\varepsilon x^{(m)} - f = O(\varepsilon^N), \quad x^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t, \varepsilon) \quad (3)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de B_2 .

Observe que a relação na Eq. (3) estabelece que, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todo truncamento $x^{(m)}$ da SAF $x^{(\infty)}$ aproxima a solução exata x^ε da Eq. (1) com erro não maior que um múltiplo de ε^N .

2.2 Formulação do problema original e sua solução exata

Para cada $\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$, procura-se $x^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C^1(\mathbb{R}_+)$, $x^\varepsilon = x(t, \varepsilon)$, solução do problema de Cauchy adimensional

$$\begin{cases} \ddot{x}^\varepsilon + x^\varepsilon = -\varepsilon \dot{x}^\varepsilon, & t > 0 \\ x^\varepsilon(0) = 1, \dot{x}^\varepsilon(0) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

que modela as oscilações harmônicas amortecidas de um sistema massa-mola. Note que, neste caso, o parâmetro de perturbação ε é também o parâmetro de amortecimento. Note também que, para cada ε fixo, a equação diferencial na Eq. (4) é uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Logo, a solução exata do problema de Cauchy na Eq. (4) é

$$x^\varepsilon(t) = e^{-t\varepsilon/2} \left(\cos w^\varepsilon t + \frac{\varepsilon}{2w^\varepsilon} \text{sen } w^\varepsilon t \right), \quad w^\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \quad (5)$$

Esta solução representa corretamente o fenômeno físico do amortecimento das oscilações até seu desaparecimento ao transcorrer do tempo causado pelo atrito com o meio, uma vez que, para todo ε , $x^\varepsilon(t)$ oscila ao redor da posição de equilíbrio $x = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

A seguir, seguindo Nayfeh (1993) [2] e Sanchez-Hubert (1992) [7] apresenta-se a aplicação de duas abordagens da teoria de perturbações para a construção de SAFs, os métodos perturbação regular e de escalas múltiplas, e ambas serão comparadas com a solução exata. Assim, ficará ilustrado o fato de que há problemas em que a abordagem tradicional da perturbação regular não consegue aproximar o comportamento (nem sequer qualitativo) da solução exata e que, portanto, se faz necessário considerar uma abordagem alternativa (aqui, escalas múltiplas).

2.3 Resolução via teoria de perturbações: perturbação regular versus escalas múltiplas

Note que, comparando a Eq.(1) com a EDO do problema de Cauchy na Eq. (4), tem-se que o operador é $L^\varepsilon = \frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon \frac{d}{dt} + 1$ e o termo independente é $f = 0$. Logo, ao procurar uma SAF do problema de Cauchy em Eq. (4) pelo método de perturbação regular, de substituir a Eq. (2) com $x_k = x_k(t)$ na Eq. (4), agrupar as potências de ε e igualar a zero seus coeficientes visando ter a relação na Eq. (3), obtém-se a seguinte recorrência de problemas:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ x_0(0) = 1, \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases}, \quad \varepsilon^k: \begin{cases} \ddot{x}_k + x_k = -\dot{x}_{k-1} \\ x_k(0) = 1, \dot{x}_k(0) = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

que produz

$$x_0(t) = \cos t, \quad x_1(t) = \frac{1}{2}(\text{sen } t - t \cos t), \quad x_2(t) = \frac{t}{8}(\text{sen } t - t \cos t), \quad (7)$$

para os quais tem-se os seguintes truncamentos para $m = 0,1,2$ da proposta de SAF na Eq. (2) com $x_k = x_k(t)$:

$$x^{(0)}(t, \varepsilon) = x_0(t) = \cos t \quad (8)$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) = \cos t + \frac{\varepsilon}{2}(\text{sen } t - t \cos t) \quad (9)$$

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) = \cos t + (\text{sen } t - t \cos t) \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} t \right) \quad (10)$$

Levando em conta que $\cos t$ e $\sin t$ são limitadas, que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin t$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \cos t$ não existem, e que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |t^k \sin t| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |t^k \cos t| = +\infty$, tem-se que os truncamentos para $m = 0,1,2$ nas Eqs. (8)-(10) da proposta de SAF na Eq. (2) com $x_k = x_k(t)$ têm valor absoluto de crescimento ilimitado, indicando que o comportamento físico seria de oscilações reforçadas com amplitude crescente. Isto está em contradição com o comportamento físico de oscilações amortecidas com amplitude decrescente até o desaparecimento que é representado corretamente pela solução exata Eq. (5) do problema na Eq. (4). Tal comportamento é ilustrado na Figura 1.

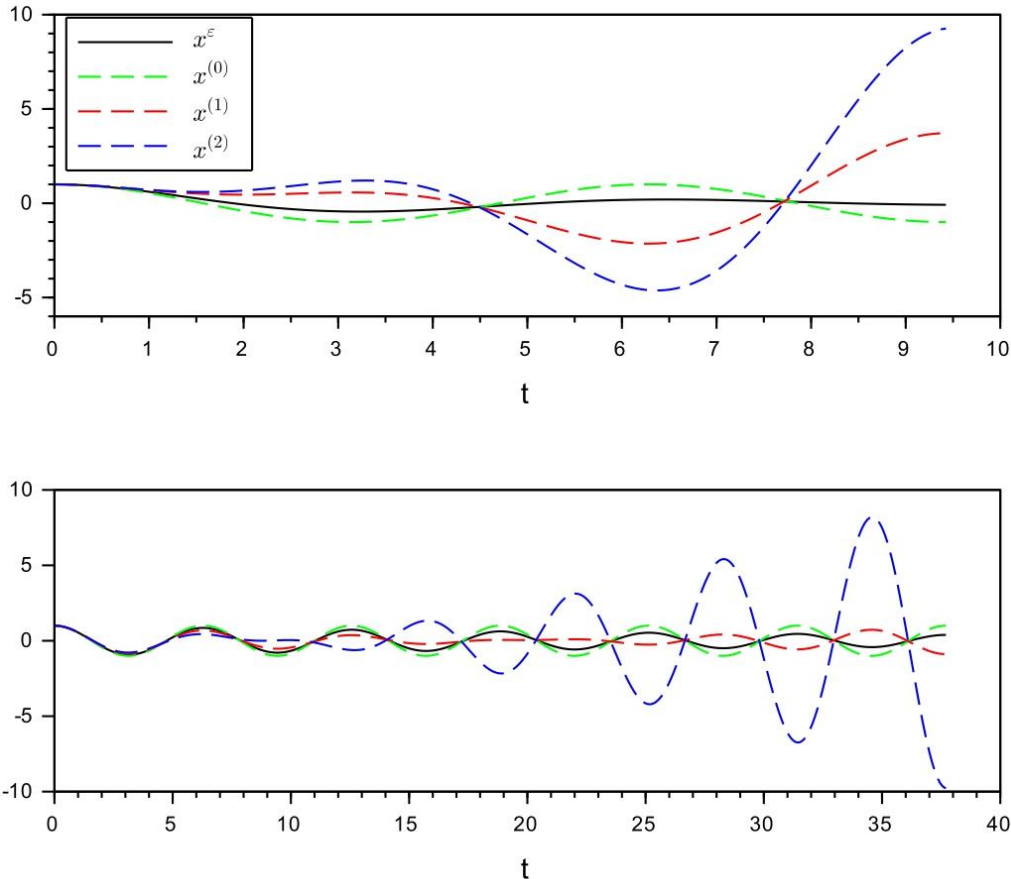


Figura 1: Comparação da solução exata na Eq. (5) do problema na Eq. (4) com os truncamentos nas Eqs. (8)-(10) da proposta de SAF para $\epsilon = 0.5$ (acima) e $\epsilon = 0.05$ (abaixo).

Tomar truncamentos com mais termos não resolve o problema, graças a presença de termos da forma $t^k \cos t$ e $t^{k-1} \sin t$ que divergem quando $t \rightarrow +\infty$, mesmo que se torne ϵ cada vez menor, como ilustrado na Figura 1. Estes termos são chamados de termos seculares e fazem com que a abordagem do método de perturbação regular não resolva o problema na Eq. (4).

Alternativamente, para eliminar o aparecimento de termos seculares de amplitude crescente na construção da SAF, propõe-se adotar uma contração temporal que, na prática, introduz uma segunda escala representada pela variável τ e definida por

$$\tau = \epsilon t, \tag{11}$$

em que t e τ são consideradas independentes, dando origem ao método das escalas múltiplas. Assim, a incógnita da Eq. (4) em termos das duas escalas é escrita como $x^\epsilon(t) = x^\epsilon(t, \tau)$, $\tau = \epsilon t$ e, levando em conta a regra da cadeia, suas derivadas de primeira e segunda ordens são reescritas como

$$\dot{x}^\varepsilon = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tau}, \quad \ddot{x}^\varepsilon = \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \tau^2} \quad (12)$$

Assim, dada a Eq. (12), o problema original na Eq. (4) é escrito em duas escalas como

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \tau^2} \right) + x^\varepsilon = -\varepsilon \left(\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tau} \right), & (t, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ x^\varepsilon(0,0) = 1, \quad \left(\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tau} \right)_{(t,\tau)=(0,0)} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

cujas EDO pode ser escrita como $L^\varepsilon x^\varepsilon = f$, com $f = 0$ e o operador

$$L^\varepsilon = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + 1. \quad (14)$$

Agora, considere o truncamento $x^{(2)}(t, \varepsilon)$ da proposta de SAF na Eq. (2) com $x_k = x_k(t, \tau)$, $\tau = \varepsilon t$, para o problema em duas escalas na Eq. (13) como

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^2 x_2(t, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (15)$$

Para garantir que a Eq. (15) satisfaça $L^\varepsilon x^{(2)} - f = O(\varepsilon^3)$ e as condições iniciais do problema em duas escalas na Eq. (13), obtém-se a seguinte recorrência de problemas para $x_k, k = 0, 1, 2$:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + x_0 = 0, & (t, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ x_0(0,0) = 1, \quad \frac{\partial x_0}{\partial t} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}, & (t, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ x_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} = -\frac{\partial x_0}{\partial \tau} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} \end{cases} \quad (17)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial x_1}{\partial \tau} - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}, & (t, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ x_2(0,0) = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} = -\frac{\partial x_1}{\partial \tau} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} \end{cases} \quad (18)$$

Note que as equações diferenciais nos problemas das Eqs. (16)-(18), tomando τ como um parâmetro, podem ser consideradas como EDOs em t . Assim, os problemas para $x_0(t)$ e $x_0(t, \tau)$ nas Eqs. (6) e (16), respectivamente, são essencialmente iguais. Porém, a presença do parâmetro τ permite eliminar os termos periódicos, resolvendo o problema da Eq. (16) utilizando como sistema fundamental de soluções $\{e^{it}, e^{-it}\}$ em vez de $\{\cos t, \sin t\}$, segundo sugere o método das amplitudes complexas [6]. Assim, procura-se a solução do problema na Eq. (16) da forma

$$x_0(t, \tau) = A_0(\tau)e^{it} + \overline{A_0(\tau)}e^{-it}, \quad (19)$$

em que $A_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau \mapsto A_0(\tau)$ e $\overline{A_0(\tau)}$ é seu conjugado. Note que da Eq. (19) tem-se

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} = i(A_0(\tau)e^{it} - \overline{A_0(\tau)}e^{-it}). \quad (20)$$

Das Eqs. (19) e (20) e as condições iniciais na Eq. (16), obtém-se

$$\operatorname{Re}\{A_0(0)\} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im}\{A_0(0)\} = 0. \quad (21)$$

A fim de garantir que a solução não tenha termos periódicos, deve-se utilizar o problema na Eq. (17). Assim, das Eqs. (19) e (20) tem-se

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = -i \left[\left(2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0(\tau) \right) e^{it} - \overline{\left(2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0(\tau) \right) e^{-it}} \right], \quad (22)$$

cujo lado direito é real se, por exemplo, $A_0(\tau)$ resolve a EDO:

$$2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0(\tau) = 0, \quad (23)$$

cuja solução pode ser procurada como

$$A_0(\tau) = \rho(\tau)e^{i\theta(\tau)}, \quad (24)$$

que, substituída na Eq. (23), tem-se

$$e^{-i\theta(\tau)} \left[\left(2 \frac{d\rho}{d\tau} + \rho(\tau) \right) + i \left(2\rho(\tau) \frac{d\theta}{d\tau} \right) \right] = 0, \quad (25)$$

a qual, levando em conta que $e^{-\theta(\tau)} \neq 0$, $\rho(\tau) \neq 0$ por Eq. (21), produz as EDOs

$$2 \frac{d\rho}{d\tau} + \rho(\tau) = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (26)$$

cujas soluções são, respectivamente,

$$\rho(\tau) = \rho_0 e^{-\tau/2}, \quad \theta(\tau) = \theta_0, \quad (27)$$

em que $\rho_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$. Logo, substituindo a Eq. (27) na Eq. (24), tem-se

$$A_0(\tau) = \rho_0 e^{(-\tau/2 + i\theta_0)}, \quad (28)$$

da qual, levando em conta a Eq. (21), segue que $\rho_0 = \frac{1}{2}$, $\theta_0 = 0$ e, portanto, da Eq. (28) tem-se

$$A_0(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau/2}, \quad (29)$$

que é uma função real. Assim, substituindo a Eq. (29) na Eq. (19), obtém-se que

$$x_0(t, \tau) = A_0(\tau)(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2} e^{-\tau/2} (e^{it} + e^{-it}) = e^{-\tau/2} \cos t. \quad (30)$$

Logo, substituindo $x_0(t, \tau)$ da Eq. (30) na Eq. (17), o problema para $x_1(t, \tau)$ é reescrito como

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = 0, (t, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ x_1(0,0) = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} \Big|_{(t,\tau)=(0,0)} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (31)$$

que também é resolvido pelo método das amplitudes complexas, procurando sua solução como

$$x_1(t, \tau) = A_1(\tau)e^{it} + \overline{A_1(\tau)}e^{-it}, \quad (32)$$

em que $A_1(\tau)$ também é uma função complexa. Logo, segue que da Eq. (32) que

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = i(A_1(\tau)e^{it} - \overline{A_1(\tau)}e^{-it}), \quad (33)$$

e

$$\operatorname{Re}\{A_1(0)\} = 0, \quad \operatorname{Im}\{A_1(0)\} = -\frac{1}{4}. \quad (34)$$

Para obter $A_1(\tau)$ usa-se o problema na Eq. (18). Assim, das Eqs. (30), (32) e (33) tem-se

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + x_2 = \frac{1}{2}e^{-\tau/2} \cos t - i \left[\left(2 \frac{dA_1}{d\tau} + A_1(\tau) \right) e^{it} - \overline{\left(2 \frac{dA_1}{d\tau} + A_1(\tau) \right) e^{-it}} \right], \quad (35)$$

cujos lados direito é real se, por exemplo, $A_1(\tau)$ resolve a Eq. (23), de forma que o segundo termo da direita da Eq. (35) se anula. Assim, procedendo de maneira semelhante àquela feita para a função $A_0(\tau)$ e utilizando da Eq. (34), obtém-se que

$$A_1(\tau) = \frac{1}{4}e^{-\tau/2}e^{-i\pi/2}, \quad (36)$$

que, substituída na Eq. (32), produz

$$x_1(t, \tau) = \frac{1}{4}e^{-\tau/2}(e^{i(t-\pi/2)} + e^{-i(t-\pi/2)}) = \frac{1}{2}e^{-\tau/2}\sin t. \quad (37)$$

Portanto, as Eqs. (30) e (37) permitem considerar o truncamento $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ da proposta de SAF na Eq. (2) com $x_k = x_k(t, \tau)$, $\tau = \varepsilon t$, para o problema em duas escalas na Eq. (15) como

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) = e^{-\tau/2} \left(\cos t + \frac{\varepsilon}{2} \sin t \right), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (38)$$

e, voltando à variável original t , tem-se

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon t/2} \left(\cos t + \frac{\varepsilon}{2} \sin t \right). \quad (39)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A expressão para $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ na Eq. (39) obtida via método de escalas múltiplas, ao contrário de aquela na Eq. (8) obtida via perturbação regular, cumpre ambas as condições iniciais do problema original na Eq. (4) e também tende a zero oscilando ao redor da posição de equilíbrio $x = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que mostra que esta aproximação condiz com a natureza física do problema. A proximidade entre a solução exata $x^\varepsilon(t)$ na Eq. (5) e as SAFs obtidas via escalas múltiplas $x^{(0)}(t, \varepsilon) = x_0(t, \varepsilon t) = e^{-\varepsilon t/2} \cos t$ da Eq. (30) e $x_1(t, \varepsilon)$ na Eq. (39), é ilustrada na Figura 2.

Note que ambas as SAFs são boas aproximações da solução exata, sendo $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ melhor que $x^{(0)}(t, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 0.5$, enquanto as três são praticamente indistinguíveis para $\varepsilon = 0.05$. Assim, fica claro que quanto menor o valor do parâmetro ε , melhor será a aproximação em relação à solução exata do problema em Eq. (4).

Vale ressaltar que, embora inicialmente se tenha utilizado o truncamento de $x^{(2)}(t, \varepsilon)$ da SAF em duas escalas na Eq. (15), tal consideração foi necessária para construir a $x^{(1)}(t, \varepsilon)$, que por sua vez deve ser considerada para construir $x^{(0)}(t, \varepsilon)$. Isto porque o intuito é encontrar uma boa aproximação para a solução exata x^ε e ambas as SAFs $x^{(m)}(t, \varepsilon)$, $m = 0, 1$, já são suficientemente boas na medida que o parâmetro ε se torna menor, como ilustrado na Figura 2. Ainda, para melhor entendimento desta afirmação, a Tabela 1 mostra a qualidade das aproximações da solução exata fornecidas pelas SAFs através do máximo erro absoluto, o qual decresce para valores decrescentes de ε e é menor para $x^{(1)}(t, \varepsilon)$.

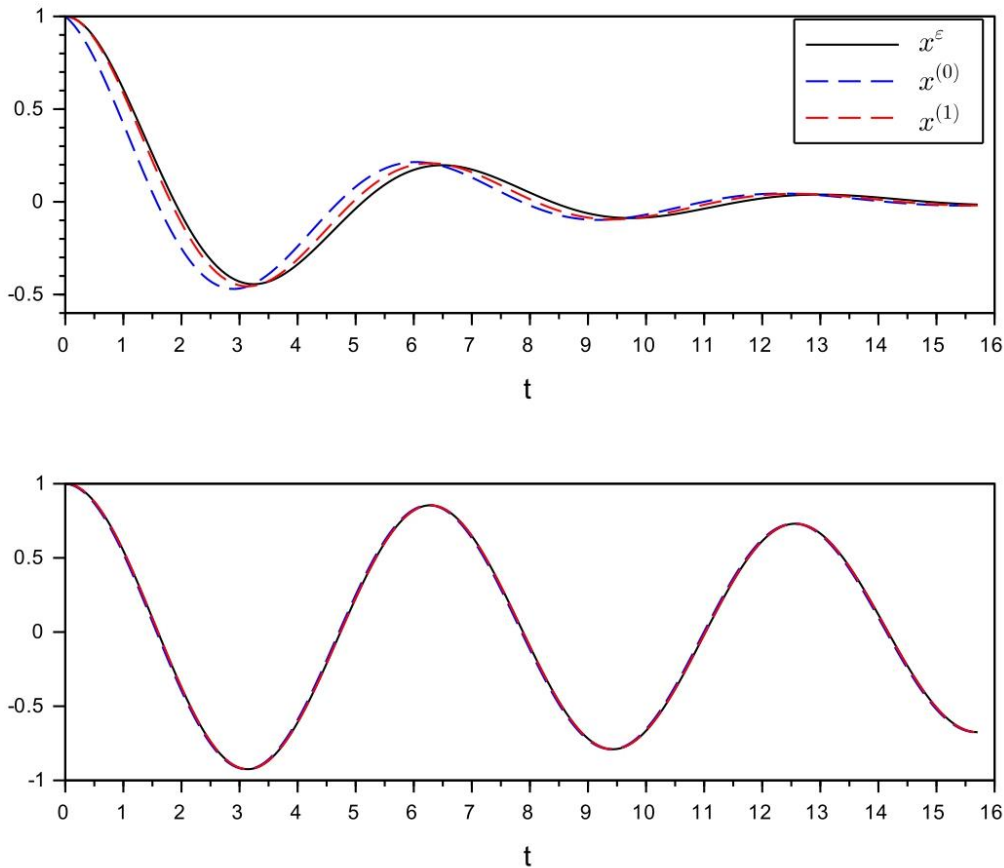


Figura 2: Comparação da solução exata na Eq. (5) do problema na Eq. (4) com as SAFs da Eq. (30) com $\tau = \varepsilon t$ e na Eq. (39) para $\varepsilon = 0.5$ (acima) e $\varepsilon = 0.05$ (abaixo).

Tabela 1: Máximos erros absolutos das SAFs da Eq. (30) com $\tau = \varepsilon t$ e na Eq. (39) e na Eq. (37) como aproximações da solução exata na Eq. (5) do problema na Eq. (4) para valores decrescentes de ε .

Erros	Valores decrescentes de ε		
	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$
$\max_{t \in \mathbb{R}_+} x^\varepsilon(t) - x^{(0)}(t, \varepsilon) $	0.2089	0.0481	0.0049
$\max_{t \in \mathbb{R}_+} x^\varepsilon(t) - x^{(1)}(t, \varepsilon) $	0.0491	0.0092	0.0009

4. CONCLUSÃO

A aplicação do método de perturbação regular ao problema do oscilador harmônico linear regularmente perturbado produziu SAFs que contém termos seculares e descrevem um comportamento de oscilações reforçadas contrário ao comportamento real de oscilações

amortecidas, como ilustrado na Figura 1. Isto é, as SAFs obtidas do método de perturbação regular não conseguem aproximar corretamente o comportamento da solução exata do problema estudado neste trabalho. Alternativamente, as SAFs de ordem 0 e 1 obtidas pelo método de escalas múltiplas são boas aproximações da solução exata do problema. Especificamente, quando o parâmetro de perturbação não é tão pequeno, a SAF de ordem 1 aproxima melhor do que a SAF de ordem 0, mas quando o parâmetro de perturbação decresce suficientemente ambas as SAFs e a solução exata são praticamente indistinguíveis, como mostrado na Figura 2 e na Tabela 1. Assim, a partir dos resultados obtidos para os casos analisados, é possível perceber que a utilização da teoria de perturbações, em particular o método das escalas múltiplas, se mostrou eficaz para aproximar com boa precisão a solução do problema do oscilador harmônico linear regularmente perturbado, ao contrário da abordagem tradicional do método de perturbação regular. Tal fato é relevante pois a expressão analítica fechada da solução exata de muitos problemas não está disponível e, assim, o método das escalas múltiplas é uma abordagem alternativa capaz de fornecer aproximações de boa qualidade para a solução exata e que reproduz seu comportamento mesmo que assintoticamente.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de financiamento 001 (DMS) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq via projeto N° 402857/2021-6 (LDPF, JBC). Os autores agradecem também os comentários e sugestões dos revisores.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Thorton ST, Marion JB. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. 5. ed. São Paulo: Cengage; 2012.
2. Nayfeh AH. *Introduction to perturbation techniques*. 1st ed. New York (US): Wiley; 1993.
3. Lara LS, Carmo TAS. Aplicações do método das escalas múltiplas em alguns problemas de física. *Lat Am J Phys Educ*. 2010 Jan;4(1):87-97. doi: 10.1590/S1806-11172010000200008
4. Bender CM, Bettencourt LMA. Multiple-scale analysis of the quantum anharmonic oscillator. *Phys Rev Lett*. 1996 May;77(22):4114-7. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.4114
5. Bakhvalov NS, Panasenko GP. *Homogenization: averaging processes in periodic media*. 1st ed. Dordrecht (NL): Kluwer; 1989.
6. Pontriaguin LS. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. 2^a ed. Madrid (ES): Aguilar; 1973.
7. Sanchez-Hubert J, Sanchez-Palencia E. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. 1st ed. Paris (FR): Masson; 1992.