

Partícula em um Poço Infinito Suave

Andrei Smirnov¹; Antonio Jorge Dantas Farias Jr.²

^{1,2}*Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, CEP:49060-100, São Cristóvão-SERGIPE, Brasil*

¹*smirnov@ufs.br; smirnov.globe@gmail.com*

²*a.jorgedantas@gmail.com*

(Recebido em 14 de novembro de 2013; aceito em 31 de janeiro de 2015)

Neste trabalho foi considerada uma partícula em um poço de potencial infinito com o fundo suave. Para a busca de autofunções e autovalores do problema foi usado o método de transformadas de Darboux. Foi apresentado um conjunto ortonormal de autofunções. Foram discutidas as características principais da partícula no poço. Foram demonstradas propriedades importantes das soluções. Foi analisada a distribuição da densidade de probabilidade da localização da partícula. Foram indicadas as condições para busca das posições mais prováveis e menos prováveis da localização da partícula e apresentadas as equações transcendentais correspondentes. Foi proposto um método aproximado de determinação de posições correspondentes a extremos da densidade de probabilidade. Os valores esperados da posição e do momento foram calculados explicitamente. Para alguns estados de energia mais baixas são mostrados os gráficos da densidade de probabilidade em comparação com as densidades para a partícula do poço infinito retangular. Como um resultado adicional útil, foram apresentadas algumas integrais de combinações especiais de funções trigonométricas.

Palavras-chave: equação de Schrödinger, poço infinito suave, transformadas de Darboux

Particle in an infinite smooth well

In this paper it is considered a particle in an infinite potential well of special smooth form. To obtain eigenfunctions and eigenvalues of the problem, a method of Darboux transformations is applied. An orthonormal set of the eigenfunctions is presented. Some important properties of the eigenfunctions are shown. Principal characteristics of the particle in the well are discussed. A function of distribution of the probability density is analyzed. Conditions for determination of points of extrema of the probability density are formulated and corresponding transcendental equations are presented. An approximated method for determination of points of extrema is also proposed. Expected values of position and momentum of the particle are calculated explicitly. For some lower energy states, distributions of probability density are shown graphically in comparison with distributions for the infinite square well. As an additional useful result, some integrals of special combinations of trigonometric functions are presented.

Keywords: Schrödinger equation, infinite smooth well, Darboux transforms

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho aplicamos o método de transformadas de Darboux para obtenção de soluções da equação de Schrödinger com um potencial de poço infinito de uma forma especial que chamamos de poço suave. O método de transformadas de Darboux foi proposto ainda em 1882 para obtenção de soluções de equações diferenciais, Ref. [1]. Um dos métodos bem efetivo, usado durante um extenso período para busca de soluções de equações diferenciais para problemas de física quântica, foi o método de fatorização. Uma revisão sistemática de aplicação do método de fatorização para a equação de Schrödinger é apresentada, por exemplo, na Ref. [2]. De fato o método de fatorização é uma maneira diferente de formulação do método de transformadas de Darboux. A relação entre os dois métodos para mecânica quântica em uma dimensão é discutida

na Ref. [3]. Na década de 1980 foi indicada também a relação entre o método de transformadas de Darboux e a mecânica quântica supersimétrica. Essa relação é discutida, por exemplo, nas Refs. [4], [5]. Na Ref. [6] são descritos os desenvolvimentos da teoria da geração de potenciais para os quais a equação de Schrödinger é exatamente solúvel. É apresentada uma generalização do método de transformadas de Darboux para a equação de Schrödinger não estacionária. Como exemplos são obtidos alguns novos potenciais não estacionários exatamente solúveis. São apresentadas famílias de potenciais isoespectrais com espectro de oscilador harmônico e de átomo de tipo hidrogênio. Uma revisão curta do desenvolvimento do método de transformadas de Darboux até 1998 é apresentada na Ref. [7].

Recentemente o método tem sido continuado tanto no seu desenvolvimento quanto nas suas novas aplicações nas várias áreas da física. No trabalho [8] é elaborado o método de transformadas de Darboux para a equação de Dirac estacionária em uma dimensão. No trabalho [9] é desenvolvido o método de transformadas singulares de Darboux em contraste ao método convencional. Esse método permite incluir na consideração matrizes singulares como um coeficiente matricial na frente da derivada na transformada. O funcionamento do método é ilustrado no exemplo de problemas inversos de espalhamento. No trabalho [10] o método de transformadas de Darboux é utilizado para construção e análise de hamiltonianos de Dirac com potencial pseudo-escalar. No mesmo trabalho é construída uma classe quadriparamétrica de sistemas sem reflexão cujos potenciais correspondem ao "twistedkinks". É demonstrado que todas as propriedades espectrais de sistemas de Dirac sem reflexão são refletidas em uma quantidade conservada não trivial, que pode ser expressa de maneira simples em termos de transformadas de Darboux. Na Ref. [11] o método de transformadas de Darboux é aplicado para estudos de modelos cosmológicos exatamente solúveis.

Nosso trabalho é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresentamos a formulação do problema, na Seção 3 obtemos soluções aplicando o método de transformadas de Darboux, na Seção 4 discutimos algumas propriedades das soluções obtidas. Na Seção 5 analisamos as soluções obtidas em comparação com as soluções do problema em poço potencial de Pöschl-Teller expressas em termos de função hipergeométrica. Na Seção 6 formulamos a conclusão deste trabalho. Uma descrição resumida do método de transformadas de Darboux é apresentada no Apêndice A. No Apêndice B são apresentados resultados adjacentes do trabalho, estes são: algumas integrais de combinações especiais de funções trigonométricas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideramos uma partícula em um poço infinito da forma

$$U(x) = \frac{U_0}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)} \quad (1)$$

no intervalo $0 \leq x \leq l$. O potencial $U(x)$ tem o comportamento seguinte: $U(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow l$, no meio do intervalo temos $U(l/2) = U_0$. O parâmetro l representa a largura do poço e U_0 representa uma altura de nível mínimo do potencial acima do nível zero da energia. O gráfico do potencial $U(x)$ é mostrado na Fig 1.

Para resolver a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi \quad (2)$$

com o potencial $U(x)$ da forma (1), aplicaremos o método de transformadas de Darboux (para uma descrição do método, ver o Apêndice A). Reescrevemos a Eq. (2) na forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = \lambda^2 \psi \quad (3)$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, V(x) = \frac{2m}{\hbar^2} U(x) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{U_0}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}. \quad (4)$$

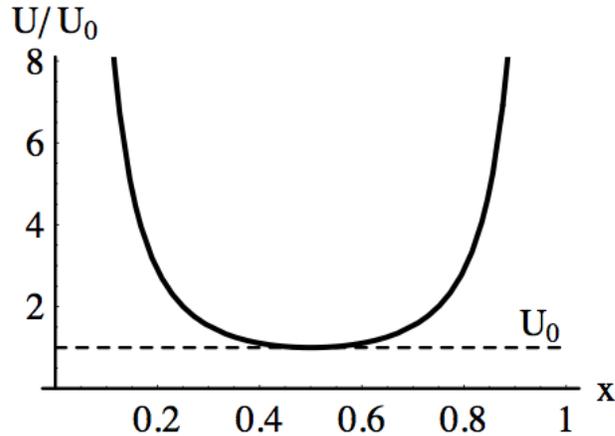


Figura 1: Potencial $U(x) = U_0 / \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Denotando

$$\frac{2m}{\hbar^2} U_0 = V_c \quad (5)$$

apresentamos o potencial $V(x)$ como

$$V(x) = \frac{V_c}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}. \quad (6)$$

Designaremos

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] = \hat{H} \quad (7)$$

como \hat{H} , que é o hamiltoniano do problema.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

De acordo com o método de transformadas de Darboux consideraremos um problema *iniciante* no poço infinito retangular no intervalo $0 \leq x \leq l$. A equação de Schrödinger para esse caso é escrita na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi . \quad (8)$$

Reescrevendo a Eq.(8) na forma apropriada para o método, temos

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi = \varepsilon^2\psi \quad (9)$$

onde

$$\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (10)$$

e designaremos o hamiltoniano do problema (9) por

$$\hat{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (11)$$

implicando que o potencial deste problema é $V_0(x) = 0$. Em termos de Hamiltoniano \hat{H}_0 o problema (9) tem a forma

$$\hat{H}_0\psi = \varepsilon^2\psi . \quad (12)$$

Soluções do problema (9) da partícula no poço infinito são bem conhecidas (ver, por exemplo [12]) e podem ser apresentadas na forma

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \varepsilon_n = \frac{\pi n}{l}, n = 1, 2, 3, \dots . \quad (13)$$

As soluções (13) são ortonormais no intervalo $(0, l)$, assim

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_0^l \psi_n^* \psi_m dx = \delta_{nm} . \quad (14)$$

Segundo o método de transformadas de Darboux apresentaremos o hamiltoniano \hat{H}_0 por meio de um operador entrelaçante \hat{L}

$$\hat{L} = \frac{d}{dx} + W(x) \quad (15)$$

e seu operador adjunto \hat{L}^\dagger como

$$\hat{H}_0 = \hat{L}^\dagger \hat{L} + \alpha^2 \quad (16)$$

onde α^2 é uma constante a ser indicada no próximo paragrafo. Escolhemos a função $W(x)$ da Eq. (15) como

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln(\psi_1) = -\frac{\psi_1'}{\psi_1} \quad (17)$$

onde ψ_1 é solução com $n = 1$ do conjunto das soluções (13). Escolhemos a constante α^2 da Eq. (16) como $\alpha^2 = \varepsilon_1^2$, onde ε_1 é o autovalor correspondente da autofunção ψ_1 . Para tal escolha temos

$$W(x) = -\frac{\psi_1'}{\psi_1} = -\frac{\pi}{l} \cot\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (18)$$

e o hamiltoniano \hat{H}_0 na forma explícita é expresso pela Eq. (11). Construímos um hamiltoniano novo \hat{H}_1 por meio do operador entrelaçante \hat{L} (15) e o seu adjunto \hat{L}^\dagger como

$$\hat{H}_1 = \hat{L}\hat{L}^\dagger + \alpha^2 \quad (19)$$

Na forma explícita o operador \hat{H}_1 é expresso como

$$\hat{H}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1 \quad (20)$$

onde

$$\begin{aligned} V_1(x) &= W' + W^2 + \alpha^2 = 2\left(\frac{\psi_1''}{\psi_1} + \varepsilon_1^2\right) - V_0(x) \\ &= 2\frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)} \end{aligned} \quad (21)$$

(Eq. (103) do Apêndice A). Então, chegamos a um problema

$$\hat{H}_1\chi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1\right]\chi = \lambda^2\chi \quad (22)$$

onde o potencial $V_1(x)$ coincide com o potencial $V(x)$ do problema (3) em que o parâmetro V_c da Eq. (6) é expresso por

$$V_c = 2\frac{\pi^2}{l^2} \quad (23)$$

As soluções do problema (22) são determinadas através das soluções (13) do problema (12) pela expressão

$$\begin{aligned} \chi_n &= \hat{L}\psi_n = \left[\frac{d}{dx} - \frac{\pi}{l} \cot\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right] \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\pi}{l} [n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)] \end{aligned} \quad (24)$$

para $n > 1$ (Eq. (84) do Apêndice A). Os autovalores λ_n são os mesmo do problema (12).

$$\lambda_n = \varepsilon_n = \frac{\pi n}{l}, n \geq 2 \quad (25)$$

As soluções (24) não são normalizadas. Denominaremos as soluções normalizadas por $\tilde{\chi}_n$

$$\tilde{\chi}_n = N_n \chi_n \quad (26)$$

onde o fator de normalização N_n é determinado como

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_1^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{n^2 - 1}} \quad (27)$$

(Eq. (78) do Apêndice A). Então, as autofunções normalizadas $\tilde{\chi}_n$ do problema (22) são

$$\tilde{\chi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l\pi\sqrt{n^2-1}}} \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right], n \geq 2. \quad (28)$$

4. PROPRIEDADES DAS SOLUÇÕES OBTIDAS

Discutiremos várias propriedades das soluções obtidas em (28). Primeiramente observamos que as autofunções (28) são funções reais, ou seja, $\tilde{\chi}_n^* = \tilde{\chi}_n$. Determinaremos os valores das funções nas extremidades $x = 0$ e $x = l$:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n(0) &= N_n \lim_{x \rightarrow 0} \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right] \\ &= N_n \left[n - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)} \right] = N_n [n - n] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n(l) &= N_n \lim_{x \rightarrow l} \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right] \\ &= N_n \left[n(-1)^n - (-1) \lim_{x \rightarrow l} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)} \right] \\ &= N_n \left[n(-1)^n + \lim_{x \rightarrow l} \frac{n\left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)}{\left(\frac{\pi n}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right)} \right] = N_n [n(-1)^n - n(-1)^n] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Vemos que $\tilde{\chi}_n(0) = \tilde{\chi}_n(l) = 0$, o que está em acordo com a interpretação física: nas paredes do poço infinito a autofunção é nula. Valores da autofunção no meio do intervalo $x = l/2$ para os estados ímpares $n = 2k + 1$ são

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2k+1}\left(\frac{l}{2}\right) &= N_{2k+1} \left[(2k+1) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)l}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi l}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)l}{2}\right) \right] \\ &= N_{2k+1} \left[(2k+1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Para os estados pares $n = 2k$

$$\tilde{\chi}_{2k}\left(\frac{l}{2}\right) = N_{2k} \left[2k \cos\left(\frac{2\pi k l}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi l}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi k l}{2}\right) \right]$$

$$= N_{2k} \left[2k \cos(\pi k) - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi k) \right] = N_{2k} (-1)^k 2k = \frac{l (-1)^k 2k}{\pi \sqrt{4k^2 - 1}}. \quad (32)$$

Introduzimos uma variável

$$\xi = x - \frac{l}{2}. \quad (33)$$

A condição de normalização para $\tilde{\chi}_n$ em termos da variável ξ tem a forma

$$\int_{l/2}^{l/2} |\tilde{\chi}_n|^2 d\xi = \int_{l/2}^{l/2} \tilde{\chi}_n^2(\xi) d\xi = 1. \quad (34)$$

As autofunções em termos da variável ξ são expressas como

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n(\xi) &= N_n \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} \left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} \left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) \right] \\ &= N_n \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi + \frac{\pi n}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} \xi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi + \frac{\pi n}{2}\right) \right] \\ &= N_n \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - n \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

portanto

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2k}(\xi) &= N_{2k} \left[2k \cos\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) \cos(\pi k) - 2k \sin\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) \sin(\pi k) \right. \\ &\quad \left. + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) \sin(\pi k) + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) \cos(\pi k) \right] \\ &= (-1)^k N_{2k} \left[2k \cos\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{l} \xi\right) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2k+1}(\xi) &= N_{2k+1} \left[(2k+1) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (2k+1) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) \right] \\ &= (-1)^k N_{2k+1} \left[\tan\left(\frac{\pi}{l} \xi\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) - (2k+1) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{l} \xi\right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Das Eqs. (36), (37) vemos que

$$\tilde{\chi}_{2k}(-\xi) = \tilde{\chi}_{2k}(\xi), \tilde{\chi}_{2k+1}(-\xi) = -\tilde{\chi}_{2k+1}(\xi) \quad (38)$$

portanto a função $\tilde{\chi}_n^2(\xi)$ é par

$$\tilde{\chi}_n^2(-\xi) = \tilde{\chi}_n^2(\xi) . \quad (39)$$

4.1. DENSIDADE DE PROBABILIDADE

A partir das soluções normalizadas (28) podemos construir a densidade de probabilidade $\rho_n(x)$ para a partícula no estado χ_n

$$\rho_n(x) = |\tilde{\chi}_n|^2 = \tilde{\chi}_n^2 = N_n^2 \chi_n^2 . \quad (40)$$

Da Propriedade (39) vemos que a função que representa a densidade de probabilidade $\rho_n(x)$ é simétrica relativo ao meio do intervalo, isto é, relativo a $x = l/2$. Discutiremos as posições mais prováveis e as posições menos prováveis da localização da partícula no poço. Determinaremos as posições de máximos e mínimos por meio das condições usuais:

$$\rho'(x) = 0, \rho''(x) < 0 \quad (41)$$

para os pontos de máximos e

$$\rho'(x) = 0, \rho''(x) > 0 \quad (42)$$

para os pontos de mínimos. Da Eq. (40) temos

$$\rho_n'(x) = 2N_n^2 \chi_n \chi_n' \quad (43)$$

$$\rho_n''(x) = 2N_n^2 (\chi_n'^2 + \chi_n \chi_n'') = 2N_n^2 (\chi_n'^2 + (V_1 - \lambda_n^2) \chi_n^2) \quad (44)$$

pois da Eq. (22) $\chi'' = (V_1 - \lambda^2)\chi$. Da Eq. (43) vemos que a condição $\rho'(x) = 0$ é satisfeita quando $\chi_n = 0$ ou $\chi_n' = 0$. As condições $\chi_n = 0$ ou $\chi_n' = 0$ não podem ser obedecidas simultaneamente, porque neste caso deveria ser $\rho_n(x) = 0, \rho_n'(x) = 0$ e $\rho_n''(x) = 0$, que é impossível. Para a função $\rho_n(x) = \tilde{\chi}_n^2$ a condição $\rho_n(x) = 0$ corresponde aos mínimos absolutos de $\rho_n(x)$. Nos pontos de mínimos absolutos $\rho_n'(x) = 0$ e $\rho_n''(x) > 0$. Então, em termos das autofunções $\chi_n(x)$ as condições de extremos de $\rho(x)$ são

$$\chi_n = 0, \chi_n' \neq 0 \quad (45)$$

para mínimos e

$$\chi_n' = 0, \chi_n \neq 0 \quad (46)$$

para máximos. No caso $\chi_n = 0, \chi_n' \neq 0$ da Eq. (44) temos para $\rho_n''(x)$

$$\rho_n''(x) = 2N_n^2 \chi_n'^2 > 0 \quad (47)$$

o que confirma a condição de mínimos (45) de $\rho(x)$. No caso $\chi_n' = 0, \chi_n \neq 0$ da Eq. (44) temos para $\rho_n''(x)$

$$\rho_n''(x) = 2N_n^2 (V_1 - \lambda_n^2) \chi_n^2 . \quad (48)$$

Da Eq. (48) segue que $\rho_n''(x) < 0$ quando

$$(V_1 - \lambda_n^2) < 0 . \quad (49)$$

Usando a expressão (21) para V_1 e (25) para λ_n , escrevemos a condição (49) na forma explícita

$$\frac{2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)} < n^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (50)$$

que dá um intervalo para os pontos de máximos de $\rho(x)$

$$\frac{l}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) < x < \frac{l}{\pi} \left(\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right) . \quad (51)$$

A condição (46) corresponde aos máximos da densidade de probabilidade no intervalo dado pela Eq. (51). A condição (45) leva a equação transcendental

$$n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 0 \quad (52)$$

para determinação das posições de mínimos de $\rho(x)$. A condição (46) dá a equação transcendental

$$-n^2 \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)} - n \cot\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 0 \quad (53)$$

para determinação das posições de máximos de $\rho(x)$. As Eqs. (52), (53) podem ser resolvidas numericamente para qualquer n .

Apresentaremos também um método aproximado de cálculo das posições de máximos e mínimos de $\rho(x)$. Escrevemos a série de Taylor da função $\rho'(x)$ na vizinhança de um ponto ζ_k

$$\rho'(\zeta_k + \delta) = \rho'(\zeta_k) + \rho''(\zeta_k)\delta + \frac{1}{2}\rho'''(\zeta_k)\delta^2 + O(\delta^3) . \quad (54)$$

Desprezando os termos maiores que primeira ordem de δ , obtemos uma aproximação linear relativa a δ

$$\rho'(\zeta_k + \delta) = \rho'(\zeta_k) + \rho''(\zeta_k)\delta . \quad (55)$$

Escolhemos um ponto ζ_k próximo a um ponto extremo x_k , tal que $x_k = \zeta_k + \delta$. Da Eq. (55) temos

$$\rho'(x_k) = \rho'(\zeta_k) + \rho''(\zeta_k)(x_k - \zeta_k) . \quad (56)$$

Usando a condição no ponto extremo $\rho'(x_k) = 0$, obtemos

$$x_k = \zeta_k - \frac{\rho'(\zeta_k)}{\rho''(\zeta_k)} . \quad (57)$$

Observamos que

$$\frac{\rho'(x_k)}{\rho''(\zeta_k)} = \frac{2\chi\chi'}{2(\chi'^2 + \chi\chi'')} = \frac{\chi\chi'}{\chi'^2 + (V_1 - \lambda^2)\chi^2} \quad (58)$$

pois da Eq. (22) $\chi'' = (V_1 - \lambda^2)\chi$. Podemos também escrever

$$\frac{\rho'(x_k)}{\rho''(\zeta_k)} = \frac{\frac{\chi'}{\chi}}{(V_1 - \lambda^2) + \left(\frac{\chi'}{\chi}\right)^2} = \frac{(\ln \chi)'}{(V_1 - \lambda^2) + ((\ln \chi)')^2} \quad (59)$$

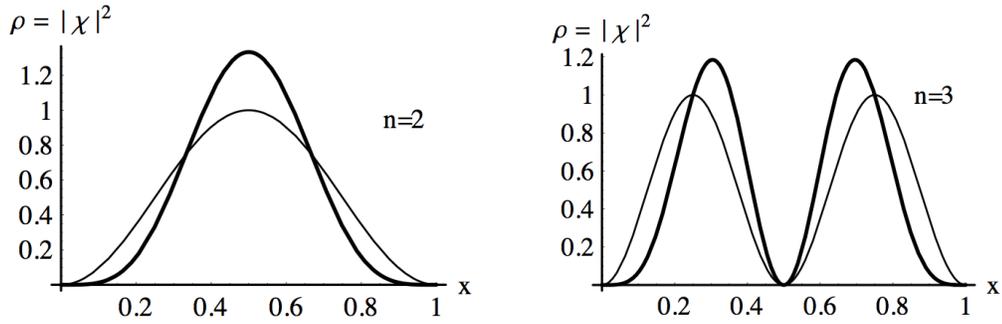


Figura 2: Densidade de probabilidade $\rho_n = |\tilde{\chi}_n|^2$, para $n = 2, 3$ (linha fina indica ρ para partícula no poço infinito retangular no estado ψ_{n-1}).

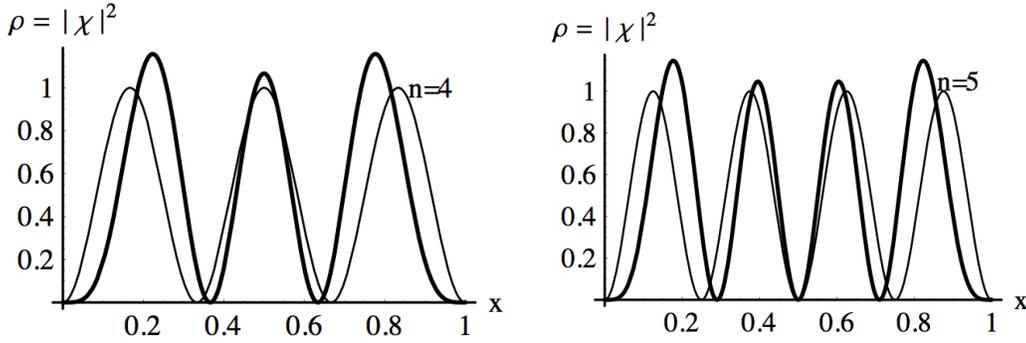


Figura 3: Densidade de probabilidade $\rho_n = |\tilde{\chi}_n|^2$, para $n = 4, 5$ (linha fina indica ρ para partícula no poço infinito retangular no estado ψ_{n-1}).

Então, para os pontos extremos temos a expressão

$$x_k = \zeta_k - \frac{(\ln \chi(\zeta_k))'}{(V_1(\zeta_k) - \lambda^2) + ((\ln \chi(\zeta_k))')^2} \quad (60)$$

Para os pontos $x_{n,k}^{min}$ de mínimos de $\rho_n(x)$ é conveniente escolher

$$\zeta_{n,k}^{min} = \frac{k}{n-1}l, k = 1, 2, 3, \dots, n-2 \quad (61)$$

e para os pontos $x_{n,k}^{max}$ de máximos de $\rho_n(x)$ é conveniente escolher

$$\zeta_{n,k}^{max} = \frac{k+\frac{1}{2}}{n-1}l, k = 1,2,3, \dots, n-2. \quad (62)$$

Para alguns primeiros estados é mostrado a distribuição de ρ_n nas Figs. (2), (3). Nos gráficos junto com a função $\rho_n = |\tilde{\chi}_n|^2$ é mostrada também a função $|\psi_{n-1}|^2$ que representa a densidade de probabilidade para a partícula no poço infinito retangular no estado ψ_{n-1} .

4.2. VALORES ESPERADOS

Determinaremos o valor esperado da posição da partícula $\langle x \rangle_n$ no estado χ_n

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_0^l \tilde{\chi}_n^* \hat{x} \tilde{\chi}_n dx = \int_0^l \tilde{\chi}_n^* x \tilde{\chi}_n dx = \int_0^l \tilde{\chi}_n^2 x dx \\ &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tilde{\chi}_n^2(\xi) \left(\xi + \frac{l}{2} \right) d\xi = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tilde{\chi}_n^2(\xi) \xi d\xi + \frac{l}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tilde{\chi}_n^2(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (63)$$

onde $\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tilde{\chi}_n^2(\xi) \xi d\xi = 0$, pois a função $\tilde{\chi}_n^2(\xi) \xi$ é ímpar, e da Eq. (34) $\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \tilde{\chi}_n^2(\xi) d\xi = 1$. Portanto

$$\langle x \rangle_n = \frac{l}{2}. \quad (64)$$

O cálculo do valor esperado do momento $\langle p \rangle_n$ dá

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_n &= \int_0^l \tilde{\chi}_n^* \hat{p} \tilde{\chi}_n dx = \int_0^l \tilde{\chi}_n^* (-i\hbar) \frac{d\tilde{\chi}_n}{dx} dx = (-i\hbar) \int_0^l \tilde{\chi}_n \frac{d\tilde{\chi}_n}{dx} dx \\ &= (-i\hbar) \int_0^l \frac{1}{2} \frac{d\tilde{\chi}_n^2}{dx} dx = \frac{1}{2} (-i\hbar) \tilde{\chi}_n^2 \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

porque das Eqs. (29), (30) $\tilde{\chi}_n(0) = \tilde{\chi}_n(l) = 0$.

Algumas integrais de combinações especiais de funções trigonométricas que são obtidas nos cálculos deste trabalho podem ser úteis em outros cálculos. As integrais reduzidas a um intervalo padrão de integração são apresentadas no Apêndice B nas Eqs. (95), (98).

5. DISCUSSÃO

O potencial da forma

$$V(x) = V_0 \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right], V_0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \quad (66)$$

para a equação de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi = E\psi \quad (67)$$

é conhecido na literatura como potencial trigonométrico de Pöschl-Teller (ou poço potencial de Pöschl-Teller). A solução da equação de Schrödinger com potencial da forma (66) é discutida no

livro [13], problema 38 e é apresentada também no livro [14], Apêndice A, problema A.I.6. A solução do problema é exibida na Ref. [13] para o intervalo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ com $\kappa > 1, \lambda > 1$ em termos da função hipergeométrica ${}_1F_2$ na forma

$$\psi_n(x) = N_n \sin^\kappa(\alpha x) \cos^\lambda(\alpha x) {}_1F_2\left(-n, \kappa + \lambda + n; \kappa + \frac{1}{2}; \sin^2(\alpha x)\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (68)$$

onde N_n é um fator de normalização. O espectro de energia é

$$E_n = V_0(2n + \lambda + \kappa)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 (2n + \lambda + \kappa)^2. \quad (69)$$

O potencial considerado no nosso trabalho escrito para a equação de Schrödinger do aspecto (67) tem a forma

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)}. \quad (70)$$

Demonstraremos que o potencial (70) pode ser deduzido para a forma de potencial de Pöschl-Teller (66). Primeiramente observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)} &= \frac{1}{\sin^2\left(2\frac{\pi}{2l}x\right)} = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} \right] \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{\hbar^2}{2m} 2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \left[\frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} + \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)} \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

Comparando a Eq. (71) e a Eq. (66), vemos que o potencial (70) corresponde ao potencial de Pöschl-Teller (66) com os valores dos parâmetros:

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}, \kappa = \lambda = 2.$$

Segundo as Eqs. (68) e (69) as correspondentes soluções da equação de Schrödinger com o potencial (70) são

$$\psi_n^f(x) = N_n \sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right) {}_1F_2\left(-n, 4 + n; \frac{5}{2}; \sin^2\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

com espectro de energia

$$E_n^f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 (2n+4)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (n+2)^2 . \quad (73)$$

Estabelecemos a correspondência entre o espectro na solução da Ref. [13], a Eq. (73), e o espectro obtido neste trabalho da Eq. (25). Denotamos o espectro da Eq. (73) por

$$E_n^f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (n_f + 2)^2, n_f \geq 0 \quad (74)$$

e o espectro obtido neste trabalho por

$$E_n^d = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n_d^2, n_d \geq 2 \quad (75)$$

de acordo com as Eqs. (25), (10). Comparando as Eqs. (74) e (75), vemos que

$$n_d = n_f + 2 \quad (76)$$

portanto, a correspondência entre as soluções obtidas neste trabalho da Eq. (28) $\tilde{\chi}_n(x)$ e as soluções (72) da Ref. [13] pode ser escrita na forma

$$\tilde{\chi}_{n+2}(x) = C_n \psi_n^f(x), n \geq 0 \quad (77)$$

onde C_n são fatores que possuem um valor diferente para estados diferentes. A conclusão da Eq. (77) foi confirmada por estudos numéricos. A obtenção de expressão explícita para os fatores C_n necessita de um estudo adicional.

Na análise das soluções obtidas neste trabalho também foi observada uma propriedade específica das soluções. Adensidade de probabilidade de estados no poço suave $\tilde{\chi}_n(x)$ da Eq. (28) exhibe uma semelhança funcional com a densidade de probabilidade de estados no poço retangular ψ_{n-1}^r da Eq. (13):

$$|\psi_n^r|^2 \sim |\tilde{\chi}_{n+1}|^2 .$$

Essa semelhança é ilustrada graficamente nas Figs. (2), (3).

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho obtemos as soluções exatas da equação de Schrödinger com um potencial de poço infinito suave, utilizando o método de transformadas de Darboux. As soluções são obtidas em termos das funções trigonométricas. São discutidas as propriedades das soluções. São indicadas as condições para busca das posições mais prováveis e menos prováveis da localização da partícula no poço suave e apresentadas as equações transcendentais correspondentes. Os valores esperados da posição e do momento são calculados explicitamente. É observada uma semelhança funcional específica da densidade de probabilidade de estados no poço infinito suave e no poço infinito retangular. É apresentada a análise comparativa das soluções obtidas com as soluções do problema em poço potencial de Pöschl-Teller as quais são expressas em termos da função hipergeométrica. É estabelecida uma expressão em termos das funções trigonométricas da função hipergeométrica com determinados valores dos parâmetros. Como resultados adjacentes

do trabalho são apresentadas algumas integrais de combinações especiais de funções trigonométricas.

APÊNDICE A. MÉTODO DE TRANSFORMADAS DE DARBOUX

Descreveremos o método de transformadas de Darboux de forma resumida e focando nos assuntos mais relevantes ao nosso trabalho. Uma descrição mais detalhada do método pode ser encontrada na Ref. [15]. Consideraremos um problema

$$\hat{H}_0\psi = \varepsilon^2\psi \quad (78)$$

onde \hat{H}_0 é um operador, que pode ser apresentado na forma

$$\hat{H}_0 = \hat{L}^\dagger \hat{L} + \alpha^2 \quad (79)$$

com \hat{L}^\dagger sendo o operador adjunto do operador \hat{L} e α^2 uma constante real. Supomos que a solução do problema (78) é conhecida (encontrada por um método), o espectro de autovalores ε_n^2 é discreto e as autofunções são apresentadas na forma de um conjunto ortonormal $\{\psi_n\}$ relativo a um produto escalar em um espaço funcional apropriado

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm} . \quad (80)$$

Denotamos simbolicamente os autovalores e as autofunções do operador \hat{H}_0 por

$$\hat{H}_0: \{\varepsilon_n^2, \psi_n\} . \quad (81)$$

Atuando com o operador \hat{L} na Eq. (78), obtemos

$$\hat{L}\hat{H}_0\psi_n = \hat{L}(\hat{L}^\dagger \hat{L} + \alpha^2)\psi_n = (\hat{L}\hat{L}^\dagger + \alpha^2)\hat{L}\psi_n = \varepsilon_n^2 \hat{L}\psi_n . \quad (82)$$

Designando

$$\hat{L}\hat{L}^\dagger + \alpha^2 = \hat{H}_1 \quad (83)$$

e

$$\hat{L}\psi_n = \chi_n \quad (84)$$

vemos que χ_n são autofunções do problema

$$\hat{H}_1\chi_n = \varepsilon_n^2\chi_n \quad (85)$$

que correspondem aos mesmo autovalores ε_n^2 do problema iniciante (78). Observamos que os operadores \hat{H}_0 e \hat{H}_1 são relacionados por intermédio do operador \hat{L} na forma

$$\hat{H}_1\hat{L} = \hat{L}\hat{H}_0 . \quad (86)$$

O operador \hat{L} é denominado operador entrelaçante. Autofunções χ_n do problema (85) geradas pela Eq. (84) são ortogonais, mas em geral não são normalizadas. Ortogonalidade das autofunções χ_n segue da ortogonalidade das autofunções ψ_n

$$\begin{aligned} (\chi_n, \chi_m) &= (\hat{L}\psi_n, \hat{L}\psi_m) = (\hat{L}^\dagger \hat{L}\psi_n, \psi_m) = ((\hat{H}_0 - \alpha^2)\psi_n, \psi_m) \\ &= ((\varepsilon_n^2 - \alpha^2)\psi_n, \psi_m) = (\varepsilon_n^2 - \alpha^2)(\psi_n, \psi_m) = (\varepsilon_n^2 - \alpha^2)\delta_{nm} . \end{aligned} \quad (87)$$

Se a constante α^2 é escolhida tal que $\alpha^2 \neq \varepsilon_n^2$, vemos que as autofunções χ_n e χ_m são ortogonais, $(\chi_n, \chi_m) = 0$. A normalização das autofunções χ_n pode ser efetuada pela mesma relação (87). Designaremos funções normalizadas por

$$\tilde{\chi}_n = N_n \chi_n \quad (88)$$

onde N_n é um fator de normalização, assim

$$(\tilde{\chi}_n, \tilde{\chi}_n) = (N_n \chi_n, N_n \chi_n) = N_n^2 (\chi_n, \chi_n) = N_n^2 (\varepsilon_n^2 - \alpha^2) = 1 \quad (89)$$

portanto

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n^2 - \alpha^2}} . \quad (90)$$

Se o operador \hat{L} é apresentado como

$$\hat{L} = \frac{d}{dx} + W(x) \quad (91)$$

onde $W(x)$ é uma função da variável x , o seu operador adjunto tem a forma

$$\hat{L}^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x) \quad (92)$$

e o operador \hat{H}_0 pode ser apresentado como

$$\hat{H}_0 = \hat{L}^\dagger \hat{L} + \alpha^2 = \left(-\frac{d}{dx} + W\right) \left(\frac{d}{dx} + W\right) + \alpha^2 = -\frac{d^2}{dx^2} - W' + W^2 + \alpha^2 \quad (93)$$

ou como

$$\hat{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 \quad (94)$$

onde

$$V_0 = -W' + W^2 + \alpha^2 . \quad (95)$$

Para o operador \hat{H}_1 temos

$$\hat{H}_1 = \hat{L}\hat{L}^\dagger + \alpha^2 = \left(\frac{d}{dx} + W\right)\left(-\frac{d}{dx} + W\right) + \alpha^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + W' + W^2 + \alpha^2 \quad (96)$$

ou

$$\hat{H}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1 \quad (97)$$

onde

$$V_1(x) = W' + W^2 + \alpha^2 . \quad (98)$$

Então, se o operador entrelaçante \hat{L} é escrito na forma (91), as Eqs. (78), (85) representam as equações diferenciais de segunda ordem

$$\hat{H}_0\psi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_0\right]\psi = \varepsilon^2\psi \quad (99)$$

e

$$\hat{H}_1\chi = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1\right]\chi = \varepsilon^2\chi \quad (100)$$

que podem ser interpretadas como equações de Schrödinger.

No caso particular, a função $W(x)$ nas Eq. (91), (92) pode ser escolhida como

$$W(x) = -\frac{d}{dx}\ln(\phi) = -\frac{\phi'}{\phi} \quad (101)$$

onde $\phi = \psi_k$ é uma das autofunções do operador \hat{H}_0 , isto é, do conjunto $\{\psi_n\}$ da Eq. (81), e $\alpha^2 = \varepsilon_k^2$ é o seu autovalor. No caso de tal escolha a relação (95) é satisfeita identicamente

$$-W' + W^2 + \alpha^2 = \frac{\phi''}{\phi} - \frac{\phi'^2}{\phi^2} + \frac{\phi'^2}{\phi^2} + \alpha^2 = \frac{\phi''}{\phi} + \alpha^2 = V_0(x) \quad (102)$$

pois ϕ é solução da Eq. (99) com $\varepsilon^2 = \alpha^2$. Para $V_1(x)$ temos

$$V_1(x) = W' + W^2 + \alpha^2 = -\frac{\phi''}{\phi} + 2\frac{\phi'^2}{\phi^2} + \alpha^2 = 2\left(\frac{\phi'^2}{\phi^2} + \alpha^2\right) - V_0 \quad (103)$$

porque da Eq. (99)

$$-\frac{\phi''}{\phi} = \alpha^2 - V_0 . \quad (104)$$

Para soluções χ da Eq. (100) temos a expressão em termos de ϕ da Eq. (101)

$$\chi_n = \hat{L}\psi_n = \left(\frac{d}{dx} + W\right)\psi_n = \psi_n' + \frac{\phi'}{\phi}\psi_n . \quad (105)$$

APÊNDICE B. ALGUMAS INTEGRAIS

1. Da condição de normalização

$$\int_0^l \tilde{\chi}_n^2 dx = 1$$

para as autofunções (28) temos a integral

$$\frac{2}{l} \int_0^l \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right]^2 dx = n^2 - 1 \quad . \quad (106)$$

Mudando o intervalo de integração para um intervalo padrão para funções trigonométricas (mudança de variável $\pi x/l \rightarrow x$), escrevemos a integral (94) na forma

$$\int_0^\pi [n \cos(nx) - \cot(x) \sin(nx)]^2 dx = \frac{\pi}{2} (n^2 - 1), n \geq 1 \quad . \quad (107)$$

O caso $n = 1$ é válido, pois a função na integral é identicamente nula.

2. Do cálculo do valor esperado da posição (63), (64), temos

$$\int_0^l \tilde{\chi}_n^2 x dx = \frac{l}{2} \quad (108)$$

para as autofunções (28) temos a integral

$$\frac{2}{l} \int_0^l \left[n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right]^2 x dx = \frac{l}{2} (n^2 - 1) \quad . \quad (109)$$

Mudando o intervalo de integração para um intervalo padrão para funções trigonométricas (mudança de variável $\pi x/l \rightarrow x$), escrevemos a integral (97) na forma

$$\int_0^\pi [n \cos(nx) - \cot(x) \sin(nx)]^2 x dx = \frac{\pi^2}{4} (n^2 - 1), n \geq 1 \quad . \quad (110)$$

O caso $n = 1$ é válido, pois a função na integral é identicamente nula.

-
1. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. C. R. Acad. Sci. 1882; Paris 94: 1343. arxiv: physics/9908003.
 2. Infeld TE, Hull H. The factorization method. Rev. Mod. Phys. 1951; 53: 21.
 3. Bagrov VG, Samsonov BF. Darboux transformation, factorization, and supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics. Theor. Math. Phys. 1995; 104: 1051.
 4. Andrianov AA, Borisov NV, Ioffe MV, Éides MI. Supersymmetric mechanics: A new look at the equivalence of quantum systems. Theor. Math. Phys. 1984; 61: 965.
 5. Andrianov AA, Borisov NV, Ioffe MV. The factorization method and quantum systems with equivalent energy spectra. Phys. Lett. A. 1984; 105: 19.
 6. Bagrov VG, Samsonov BF. Darboux transformation of the Schrödinger equation. Phys. Part. Nucl. 1997; 28: 374.
 7. Rosu HC. Short survey of Darboux transformations. arxiv: quant-ph/9809056.

8. Debergh N, Pecheritsin AA, Samsonov BF, Bossche BV. Darboux transformations of the one-dimensional stationary Dirac equation. *J. Phys. A* 2002; 35: 3279.
9. Pecheritsin AA, Pupasov AM, Samsonov BF. Singular matrix Darboux transformations in the inverse scattering method. *J. Phys. A.* 2001; 44: 205305. arXiv: quant-ph/1102.5255.
10. Correa F, Jakubsky V, Twisted kinks, Dirac transparent systems and Darboux transformations, *Phys. Rev. D.* 2014; 90: 125003. arXiv: hep-th/1406.2997.
11. Yurov AV, Vereshchagin SD. The Darboux transformation na dexactly solvable cosmological models, *Theor. Math. Phys.* 2004; 139: 787.
12. Griffiths DJ. *Introduction to quantum mechanics*, 2nd ed. New Jersey, Estados Unidos: Pearson; 2005.
13. Flugge S. *Practical quantum mechanics*. Berlin: Springer-Verlag; 1999.
14. Bagrov VG, Gitman DM. *Exact solutions of relativistic wave equations*. Dordrecht: KluwerAcademic Publishers; 1990.
15. Matveev VB, Salle MA. *Darboux Transformations and Solutions*. Berlin: Springer; 1991.