

Representações cíclicas de spinores de Dirac em 1+1 dimensões

Andrei Smirnov¹; José Anselmo da Silva Santos²

^{1,2}Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil

¹ smirnov@ufs.br; smirnov.globe@gmail.com; ² prof.jass@gmail.com

(Recebido em 14 de novembro de 2013; aceito em 22 de janeiro de 2015)

Resumo. Neste trabalho estudaremos spinores de Dirac em 1+1 dimensões sob o ponto de vista das representações cíclicas. As várias representações cíclicas são definidas por uma escolha das matrizes de Dirac β, α de tal maneira que $\beta = \sigma^i, \alpha = \sigma^j$ e $\gamma^1 = i\sigma^k$, com $i \neq j \neq k$. Para cada uma das representações são determinados os spinores na forma explícita para partículas e antipartículas. Também foram encontradas as expressões explícitas das transformações entre os spinores e matrizes de Dirac nas várias representações cíclicas. Foram discutidas também as várias propriedades das transformações e spinores obtidos.

Palavras-chave: partícula de Dirac, representações cíclicas, transformações unitárias.

Cyclic representations of Dirac spinors in 1+1 dimensions.

In this work we study the Dirac spinors in 1 +1 dimensions from the point of view of cyclic representations. Various cyclic representations are defined by a choice of Dirac matrices α and β such that $\beta = \sigma^i, \alpha = \sigma^j$ e $\gamma^1 = i\sigma^k$, com $i \neq j \neq k$. For each of the representations are determined spinors for particles and antiparticles in explicit form. There were also found transformations between the spinors and the Dirac matrices in various cyclical representations in explicit form. There were also discussed some properties of the transformations and the spinors obtained.

Keywords: Dirac particle, cyclic representations, unitary transformations.

1. INTRODUÇÃO

Consideremos a equação de Dirac em 1+1 dimensões

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad \mu = 0, 1 \quad (1)$$

onde usualmente

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I, \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1) \quad (2)$$

em termos das matrizes de Dirac β e α as matrizes γ^μ são

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^1 = \beta\alpha \quad (3)$$

tal que,

$$\beta^2 = \alpha^2 = \mathbf{1}, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = \mathbf{1} \quad (4)$$

as condições (4) obedecem as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

As duas matrizes de Dirac β e α podem ser escolhidas arbitrariamente entre as três matrizes de Pauli. Uma escolha de matrizes de Dirac determina uma representação de spinor ψ em 1+1 dimensões. Escolhamos as matrizes de Dirac de tal forma que

$$\beta = \sigma^i, \quad \alpha = \sigma^j, \quad \gamma^1 = i\sigma^k, \quad i \neq j \neq k. \quad (6)$$

A cada escolha na equação (6) realiza uma representação de spinores, a estas representações chamaremos de **representações cíclicas**. Usaremos duas representações duas formas de notações para as varias representações: notação tensorial (NT), com dois índices e notação vetorial (NV), com um índice, (ver tabela 1).

Efetuiremos cálculos na forma usual (ver, por exemplo, [1], [2], [3], [4]). No caso de partícula, as soluções da equação (1) buscaremos na forma

$$\psi_+(x) = e^{-ipx} u_p, \quad (7)$$

no caso de antipartícula, na forma

$$\psi_-(x) = e^{ipx} v_p, \quad (8)$$

onde $px = p_\mu x_\mu$ e u_p, v_p são spinores constantes, que obedecem respectivamente as equações

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u_p = 0, \quad (-\gamma^\mu p_\mu - m)v_p = 0. \quad (9)$$

Em referencial de repouso $p_1 = 0, p_0 = m$, portanto

$$(\gamma^0 m - m)u_0 = 0, \quad (-\gamma^0 m - m)v_0 = 0 \quad (10)$$

onde estes u_0 e v_0 são designados spinores em referencial de repouso. Sabendo a forma explícita dos spinores u_0 e v_0 é possível determinar os spinores u_p e v_p em um referencial arbitrário, como segue

$$u_p = f(\gamma^\mu p_\mu + m)u_0, \quad v_p = g(-\gamma^\mu p_\mu + m)v_0 \quad (11)$$

onde f e g são fatores de normalização. A condição de normalização para os spinores u_p e v_p é exigida a normalização usual para partícula e antipartícula

$$\bar{u}_p u_p = 1, \quad \bar{v}_p v_p = -1 \quad (12)$$

em que a barra denota a conjugação de Dirac, $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$. Se u_p e v_p são recebidos na forma (11), as condições (12) podem ser apresentadas na forma

$$1 = \bar{u}_p u_p = f^2 \bar{u}_0 (\gamma^\mu p_\mu + m)^2 u_0 = f^2 \bar{u}_0 2m (\gamma^\mu p_\mu + m) u_0 = f^2 2m \bar{u}_0 u_p \quad (13)$$

e

$$-1 = \bar{v}_p v_p = g^2 \bar{v}_0 (-\gamma^\mu p_\mu + m)^2 v_0 = g^2 \bar{v}_0 2m (-\gamma^\mu p_\mu + m) v_0 = g^2 2m \bar{v}_0 v_p \quad (14)$$

Tabela 1: Representações cíclicas de spinores Dirac em 1+1 dimensões.

NT	β	α	γ^0	γ^1	NV
12	σ^1	σ^2	σ^1	$i\sigma^3$	3
23	σ^2	σ^3	σ^2	$i\sigma^1$	1
31	σ^3	σ^1	σ^3	$i\sigma^2$	2

onde são usadas as relações $(\pm \gamma^\mu p_\mu + m)^2 = 2m(\pm \gamma^\mu p_\mu + m)$. Observaremos que a condição de normalização para u_0 e v_0 pode ser apresentada na forma

$$u_0^\dagger u_0 = v_0^\dagger v_0 = 1 \quad (15)$$

pois,

$$\bar{u}_p u_p = u_0^\dagger \gamma^0 u_0 = u_0^\dagger u_0 = 1$$

$$\bar{v}_p v_p = v_0^\dagger \gamma^0 v_0 = -v_0^\dagger v_0 = -1$$

onde são usadas as equações (10) na forma

$$\gamma^0 u_0 = u_0, \quad \gamma^0 v_0 = -v_0 \quad (16)$$

Observamos ainda que as equações (16) podem ser escritas também para os spinores de Dirac conjugados

$$u_0^\dagger = u_0^\dagger \gamma^{0\dagger} = u_0^\dagger \gamma^0 = \bar{u}_0, \quad v_0^\dagger = -v_0^\dagger \gamma^{0\dagger} = -v_0^\dagger \gamma^0 = -\bar{v}_0 \quad (17)$$

portanto

$$u_0^\dagger \gamma^0 = \bar{u}_0 \gamma^0 = \bar{u}_0, \quad v_0^\dagger \gamma^0 = -\bar{v}_0 \gamma^0 = \bar{v}_0 \quad (18)$$

O uso das equações (16) permite apresentar as equações (11) na forma mais conveniente

$$u_p = f(\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + m)u_0 = f(p_0 + m + \gamma^1 p_1)u_0 \quad (19)$$

e

$$v_p = g(-\gamma^0 p_0 - \gamma^1 p_1 + m)u_0 = g(p_0 + m - \gamma^1 p_1)u_0 \quad (20)$$

2. SPINORES NA FORMA EXPLICITA

Obteremos os spinores na forma explicita nas várias representações. Spinores no referencial de repouso denotaremos por

$$u_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (21)$$

2.1. REPRESENTAÇÃO 12 \equiv 3

Das equações (16) temos

$$\sigma^1 u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi = \chi. \quad (22)$$

$$\sigma^1 v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \end{pmatrix}, \quad \eta = -\xi. \quad (23)$$

portanto

$$u_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix}; \quad v_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Usando as equações (15), obtemos

$$2|\phi|^2 = 1; \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (25)$$

$$2|\xi|^2 = 1; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (26)$$

Escolhendo $\theta = \varphi = 0$, determinamos

$$u_0^{12} = u_0^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_0^{12} = v_0^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Da equação (19) temos

$$\begin{aligned} u_p^{12} &= f(p_0 + m + \gamma^1 p_1) u_0^{12} = f(p_0 + m + i\sigma^3 p_1) u_0^{12} \\ &= f \begin{pmatrix} p_0 + m + ip_1 & 0 \\ 0 & p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{f}{\sqrt{2}} (p_0 + m + ip_1) \end{aligned} \quad (28)$$

Da equação (20) temos

$$\begin{aligned} v_p^{12} &= g(p_0 + m - \gamma^1 p_1) v_0^{12} = g(p_0 + m - i\sigma^3 p_1) v_0^{12} \\ &= g \begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 & 0 \\ 0 & p_0 + m + ip_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 \\ -(p_0 + m + ip_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Para determinar o fator de normalização usamos a condição (12) na forma (13), (14) e as relações (17)

$$\bar{u}_0^{12} = \bar{u}_0^{12\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad 1); \quad \bar{v}_0^{12} = -\bar{v}_0^{12\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 \quad 1). \quad (30)$$

Dai,

$$2mf\bar{u}_0^{12}u_p^{12} = 2mf\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + m + ip_1 \\ p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} = 2mf^2(p_0 + m) = 1 \quad (31)$$

$$2mg\bar{v}_0^{12}v_p^{12} = 2mg\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 \\ -(p_0 + m + ip_1) \end{pmatrix} = -2mg^2(p_0 + m) = -1 \quad (32)$$

Das fórmulas (31), (32) segue que

$$f = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}; \quad g = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}. \quad (33)$$

Então, os spinores normalizados para partícula e antipartícula na representação $12 \equiv 3$, na forma explícita são

$$u_p^{12} = u_p^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \begin{pmatrix} p_0 + m + ip_1 \\ p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$v_p^{12} = v_p^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 \\ -(p_0 + m + ip_1) \end{pmatrix} \quad (35)$$

A ortogonalidade dos spinores u_p, v_p pode ser confirmada por cálculo explícito das equações (34) e (35):

$$\begin{aligned} \bar{u}_p v_p &= u_p^\dagger \gamma^0 v_p = \frac{fg}{2} \begin{pmatrix} p_0 + m + ip_1 \\ p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 \\ -(p_0 + m + ip_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{fg}{\sqrt{2}} (p_0 + m - ip_1 \quad p_0 + m + ip_1) \begin{pmatrix} -(p_0 + m + ip_1) \\ p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{fg}{\sqrt{2}} [(p_0 + m)^2 + p_1^2] - [(p_0 + m)^2 + p_1^2] = 0 \quad (36)$$

e conseqüentemente

$$(u_p^\dagger \gamma^0 v_p)^\dagger = v_p^\dagger (\gamma^0)^\dagger u_p = v_p^\dagger \gamma^0 u_p = \bar{v}_p u_p = 0 \quad (37)$$

2.2. REPRESENTAÇÃO 23 \equiv 1

Das equações (16) temos

$$\sigma^2 u_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\chi \\ i\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \chi = i\phi \quad (38)$$

$$\sigma^2 v_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \end{pmatrix}, \eta = -i\xi \quad (39)$$

portanto

$$u_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ i\phi \end{pmatrix}; \quad v_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ -i\xi \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Usando as equações (15), obtemos

$$2|\phi|^2 = 1; \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}, \phi \in \mathbb{R} \quad (41)$$

$$2|\xi|^2 = 1; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R} \quad (42)$$

Escolhendo $\theta = \varphi = 0$, determinamos

$$u_0^{23} = u_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_0^{23} = v_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Da equação (19) temos

$$\begin{aligned} u_p^{23} &= f(p_0 + m + \gamma^1 p_1) u_0^{23} = f(p_0 + m + i\sigma^3 p_1) u_0^{23} \\ &= f \begin{pmatrix} p_0 + m & ip_1 \\ ip_1 & p_0 + m \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -(p_0 + m - ip_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

Da equação (20) temos

$$\begin{aligned} v_p^{23} &= g(p_0 + m - \gamma^1 p_1) v_0^{23} = g(p_0 + m - i\sigma^3 p_1) v_0^{23} \\ &= g \begin{pmatrix} p_0 + m & -ip_1 \\ -ip_1 & p_0 + m \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

Para determinar o fator de normalização usamos a condição (12) na forma (13), (14) e as relações (17)

$$\bar{u}_0 = u_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -i); \quad \bar{v}_0 = -v_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 \quad -i) \quad (46)$$

Daí,

$$2mf\bar{u}_0^{12}u_p^{12} = 2mf\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i)\frac{f}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} = 2mf^2(p_0 + m) = 1 \quad (47)$$

$$2mg\bar{v}_0^{12}v_p^{12} = 2mg\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \quad -i)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} = -2mg^2(p_0 + m) = -1 \quad (48)$$

Das equações (47), (48) segue que

$$f = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}; \quad g = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}. \quad (49)$$

Então, os spinores normalizados para partícula e antipartícula na representação $23 \equiv 1$, na forma explícita são

$$u_p^{23} = u_p^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}\begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$v_p^{23} = v_p^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}\begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \quad (51)$$

A ortogonalidade dos spinores u_p, v_p pode ser confirmada por cálculo explícito das equações (50) e (51):

$$\begin{aligned} \bar{u}_p v_p &= u_p^\dagger \gamma^0 v_p = \frac{fg}{2}\begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{fg}{\sqrt{2}}(p_0 + m - p_1 \quad -i(p_0 + m + p_1)) \begin{pmatrix} -(p_0 + m - p_1) \\ i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{fg}{\sqrt{2}}[(p_0 + m)^2 - p_1^2 - ((p_0 + m)^2 - p_1^2)] = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

econseqüentemente $\bar{v}_p u_p = 0$.

2.3. REPRESENTAÇÃO $31 \equiv 2$

Das equações (16) temos

$$\sigma^3 u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix}, \chi = 0 \quad (53)$$

$$\sigma^3 v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \end{pmatrix}, \xi = 0 \quad (54)$$

portanto

$$u_0 = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad (55)$$

Usando as equações (15), obtemos

$$|\phi| = 1; \quad \phi = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \quad (56)$$

$$|\eta| = 1; \quad \eta = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R} \quad (57)$$

Escolhendo $\theta = \varphi = 0$, determinamos

$$u_0^{31} = u_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_0^{31} = v_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Da equação (19) temos

$$\begin{aligned} u_p^{31} &= f(p_0 + m + \gamma^1 p_1) u_0^{31} = f(p_0 + m + i\sigma^2 p_1) u_0^{31} \\ &= f \begin{pmatrix} p_0 + m & p_1 \\ -p_1 & p_0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= f \begin{pmatrix} p_0 + m \\ -p_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

Da equação (20) temos

$$\begin{aligned} v_p^{31} &= g(p_0 + m - \gamma^1 p_1) v_0^{31} = g(p_0 + m - i\sigma^2 p_1) v_0^{31} \\ &= g \begin{pmatrix} p_0 + m & -p_1 \\ p_1 & p_0 + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= g \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_0 + m \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

Para determinar o fator de normalização usamos a condição (12) na forma (13), (14) e as relações (17)

$$\bar{u}_0^{31} = u_0^{31\dagger} = (1 \ 0); \quad \bar{v}_0^{12} = -v_0^{12\dagger} = (0 \ -1) \quad (61)$$

Daí,

$$2mf\bar{u}_0^{31}u_p^{31} = 2mf\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 0)\frac{f}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + m \\ -p_1 \end{pmatrix} = 2mf^2(p_0 + m) = 1 \quad (62)$$

$$2mg\bar{v}_0^{31}v_p^{31} = 2mg\frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -p_1 \\ p_0 + m \end{pmatrix} = -2mg^2(p_0 + m) = -1 \quad (63)$$

Das equações (62), (63) segue que

$$f = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}; \quad g = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}. \quad (64)$$

Então, os spinores normalizados para partícula e antipartícula na representação $31 \equiv 2$, na forma explícita são

$$u_p^{31} = u_p^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \begin{pmatrix} p_0 + m \\ -p_1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$v_p^{31} = v_p^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_0 + m \end{pmatrix} \quad (66)$$

A ortogonalidade dos spinores u_p, v_p pode ser confirmada por cálculo explícito das equações (34) e (35):

$$\begin{aligned} \bar{u}_p v_p &= u_p^\dagger \gamma^0 v_p = fg \begin{pmatrix} p_0 + m \\ -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_0 + m \end{pmatrix} \\ &= fg(p_0 + m \ -p_1) \begin{pmatrix} -p_1 \\ -(p_0 + m) \end{pmatrix} \\ &= fg[p_1(p_0 + m) - (p_0 + m)p_1] = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

e conseqüentemente $\bar{v}_p u_p = 0$.

3. TRANSFORMAÇÕES UNITÁRIAS DAS TRANSFORMAÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES CÍCLICAS

Os spinores de Dirac nas várias representações são relacionados por uma transformação unitária \mathcal{U} ,

$$\tilde{\psi} = \mathcal{U}\psi; \quad \mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^\dagger\mathcal{U} = \mathbf{1} \quad (68)$$

tal que se ψ obedece a equação de Dirac

$$(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (69)$$

$\tilde{\psi}$ obedece a equação

$$(\tilde{\gamma}^\mu i\partial_\mu - m)\tilde{\psi} = 0 \quad (70)$$

onde

$$\tilde{\gamma}^\mu = \mathcal{U}\gamma^\mu\mathcal{U}^\dagger \quad (71)$$

A transformação \mathcal{U} no caso de 1+1 dimensões pode ser apresentada por uma matriz 2×2 . A expressão explícita da matriz é conveniente escolher, por exemplo, na forma

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} r e^{i\alpha} e^{i\theta} & \sqrt{1-r^2} e^{i\beta} \\ \sqrt{1-r^2} e^{i\alpha} & r e^{i\beta} e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (72)$$

onde α, β, θ e r são parâmetros reais arbitrários, $|r| \leq 1$. Devido a estrutura dos spinores para partículas e antipartículas são diferentes, as matrizes que realizam as transformações entre os spinores para partículas e antipartículas nas várias representações, em geral, também são diferentes. Denotamos estas transformações para partículas e antipartículas por \mathcal{U}, \mathcal{V}

$$\tilde{\psi}_+ = e^{-ipx} \tilde{u}_p = \mathcal{U}\psi_+; \quad \tilde{\psi}_- = e^{ipx} \tilde{v}_p = \mathcal{V}\psi_- \quad (73)$$

Para os spinores u_p, v_p temos, então, as relações

$$\tilde{u}_p = \mathcal{U}u_p; \quad \tilde{v}_p = \mathcal{V}v_p \quad (74)$$

Consideraremos as transformações unitárias que relacionam os spinores e matrizes γ^μ nas várias representações cíclicas. Usando a notação vetorial das representações, denotamos as transformações entre os spinores por

$$\mathcal{U}_{ij}: u_p^j \rightarrow u_p^i; \quad \mathcal{V}_{ij}: v_p^j \rightarrow v_p^i \quad (75)$$

tal que

$$u_p^j = \mathcal{U}_{ji} u_p^i; \quad v_p^j = \mathcal{V}_{ji} v_p^i \quad (76)$$

Aplicando $\mathcal{U}_{ji}^\dagger, \mathcal{V}_{ji}^\dagger$

$$\mathcal{U}_{ji}^\dagger u_p^j = u_p^i; \quad \mathcal{V}_{ji}^\dagger v_p^j = v_p^i \quad (77)$$

$$\mathcal{U}_{ij} u_p^j = u_p^i; \quad \mathcal{V}_{ij} v_p^j = v_p^i \quad (78)$$

segue imediato daí que

$$\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{ji}^\dagger; \quad \mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ji}^\dagger \quad (79)$$

Aplicando a composição de duas transformações, temos

$$u_p^k = \mathcal{U}_{kj} (\mathcal{U}_{ji} u_p^i) = (\mathcal{U}_{kj} \mathcal{U}_{ji}) u_p^i; \quad v_p^k = \mathcal{V}_{kj} (\mathcal{V}_{ji} v_p^i) = (\mathcal{V}_{kj} \mathcal{V}_{ji}) v_p^i \quad (80)$$

Por outro lado

$$u_p^k = \mathcal{U}_{ki} u_p^i; \quad v_p^k = \mathcal{V}_{ki} v_p^i \quad (81)$$

Portanto as matrizes \mathcal{U} e \mathcal{V} das transformações obedecem a seguinte regra de composição:

$$\mathcal{U}_{ki} = \mathcal{U}_{kj}\mathcal{U}_{ji}; \quad \mathcal{V}_{ki} = \mathcal{V}_{kj}\mathcal{V}_{ji} \quad (82)$$

Para as matrizes γ temos (índices latinos denota representação):

$$\gamma_i^\mu = \mathcal{U}_{ij}\gamma_j^\mu\mathcal{U}_{ij}^\dagger = \mathcal{U}_{ij}\gamma_j^\mu\mathcal{U}_{ji}; \quad \gamma_i^\mu = \mathcal{V}_{ij}\gamma_j^\mu\mathcal{V}_{ij}^\dagger = \mathcal{V}_{ij}\gamma_j^\mu\mathcal{V}_{ji} \quad (83)$$

Apresentamos abaixo as expressões explícitas das transformações unitárias \mathcal{U} e \mathcal{V} entre as várias representações cíclicas de spinores e de matrizes de Dirac:

i. para partículas

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} & \mathcal{U}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ \mathcal{U}_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} & \mathcal{U}_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ \mathcal{U}_{31} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -(1+i) \end{pmatrix} & \mathcal{U}_{13} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & -(1-i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

ii. para antipartículas

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} & \mathcal{V}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ \mathcal{V}_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \mathcal{V}_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V}_{31} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -(1-i) & 1-i \end{pmatrix} & \mathcal{V}_{13} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -(1+i) \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (85)$$

Usando a parametrização da matriz unitária 2×2 da Eq. (72) apresentaremos as transformações unitárias \mathcal{V}_{ij} , \mathcal{U}_{ij} em termos dos parâmetros $(\alpha, \beta, \theta, r)$ na forma $\mathcal{U}_{ij} = (\alpha, \beta, \theta, r)$ e $\mathcal{V}_{ij} = (\alpha, \beta, \theta, r)$:

i. para partículas

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{12} &= \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{U}_{21} &= \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \mathcal{U}_{23} &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{U}_{32} &= \left(0, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \mathcal{U}_{31} &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{U}_{13} &= \left(0, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

ii. para antipartículas

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{12} &= \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{V}_{21} &= \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \mathcal{V}_{23} &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{V}_{32} &= \left(0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \mathcal{V}_{31} &= \left(0, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) & \mathcal{V}_{13} &= \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (87)$$

Vemos que em todos os operadores nas (86), (87) o parâmetro $r = 1/\sqrt{2}$. Associando os parâmetros α, β, θ às coordenadas cartesianas do \mathbb{R}^3 , apresentaremos cada operador como um ponto do espaço, que é mostrado na Fig. 1.

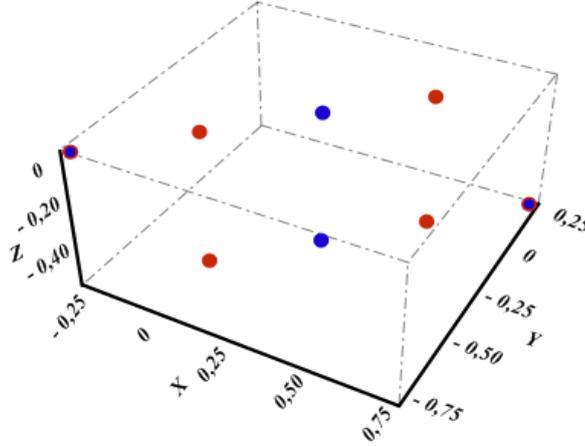


Figura 1: Operadores \mathcal{U}, \mathcal{V} associados aos pontos no \mathbb{R}^3 : ponto azul corresponde à transformação \mathcal{U} , ponto vermelho corresponde a transformação \mathcal{V} .

Por uma razão de conveniência de uso reunimos junto os spinores das várias representações: as equações (34), (50), (65) para partículas e as equações (35), (51), (66) para antipartículas,

$$u_p^1 = \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \quad u_p^2 = f \begin{pmatrix} p_0 + m \\ -p_1 \end{pmatrix} \quad u_p^3 = \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m + ip_1 \\ p_0 + m - ip_1 \end{pmatrix} \quad (88)$$

$$v_p^1 = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - p_1 \\ -i(p_0 + m + p_1) \end{pmatrix} \quad v_p^2 = g \begin{pmatrix} -p_1 \\ p_0 + m \end{pmatrix} \quad v_p^3 = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + m - ip_1 \\ -(p_0 + m + ip_1) \end{pmatrix} \quad (89)$$

onde

$$f = g = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}}. \quad (90)$$

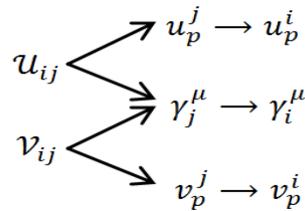


Figura2: Transformações realizadas pelos operadores unitários \mathcal{U} e \mathcal{V} .

Tabela 2: Transformações dos pares das matrizes.

operadores	transformação
$\mathcal{U}_{13}, \mathcal{V}_{13}$	$(\sigma^1, \sigma^3) \rightarrow (\sigma^2, \sigma^1)$
$\mathcal{U}_{21}, \mathcal{V}_{21}$	$(\sigma^2, \sigma^1) \rightarrow (\sigma^3, \sigma^2)$
$\mathcal{U}_{32}, \mathcal{V}_{32}$	$(\sigma^3, \sigma^2) \rightarrow (\sigma^1, \sigma^3)$
$\mathcal{U}_{31}, \mathcal{V}_{31}$	$(\sigma^2, \sigma^1) \rightarrow (\sigma^1, \sigma^3)$
$\mathcal{U}_{12}, \mathcal{V}_{12}$	$(\sigma^3, \sigma^2) \rightarrow (\sigma^2, \sigma^1)$
$\mathcal{U}_{23}, \mathcal{V}_{23}$	$(\sigma^1, \sigma^3) \rightarrow (\sigma^3, \sigma^2)$

Observamos que as transformações entre várias representações de matrizes γ são realizadas tanto por matrizes \mathcal{V} quanto por matrizes \mathcal{U} . Um esquema de realização das transformações por operadores unitárias \mathcal{U} , \mathcal{V} e apresentada na Fig. 2. Apresentamos também as transformações de matrizes γ entre várias representações em termos de matrizes de Pauli σ^i na Tabela 2.

4. DISCUSSÃO

No trabalho são considerados spinores de Dirac em 1+1 dimensões nas várias representações chamadas representações cíclicas. As representações cíclicas são definidas pela escolha das matrizes de Dirac na forma indicada na Eq. (6). Entretanto é fácil estimar um número total de várias representações de matrizes de Dirac β , α em termos de matrizes de Pauli. Como foi indicado na Introdução, as duas matrizes de Dirac β , α podem ser escolhidas arbitrariamente entre as três matrizes de Pauli. O número de opções da escolha de dois elementos do conjunto de três elementos é 3. Se a ordem dos dois elementos determina opções diferentes, o número das opções é dobrado: $2 \cdot 3 = 6$. Além disso, uma matriz de Pauli associada a matriz de Dirac pode ter sinal positivo ou negativo, que multiplica o número das opções em quatro vezes. Então o número total das representações é determinado como $6 \cdot 4 = 24$. Apresentamos todas as representações na forma explícita, por exemplo, como

$$\beta = s\sigma^i, \quad \alpha = t\sigma^j; \quad s = \pm 1, t = \pm 1; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \quad (91)$$

Número total das transformações unitárias entre quaisquer duas representações da Eq. (91) é $24^2 - 24 = 24 \cdot 23 = 552$.

Observamos que transformações unitárias entre spinores nas várias representações são aplicáveis não apenas no caso das partículas livres, mas também no caso quando uma partícula sofre interação com um campo externo. Se uma partícula é sujeita a ação de um campo externo, a equação de Dirac em 1+1 dimensões pode ser apresentada na forma hamiltoniana

$$\hat{H}\psi = \alpha\hat{p} + \beta m + \hat{V} \quad (92)$$

com um potencial matricial \hat{V} . No caso de 1+1 dimensões o potencial pode ser expresso em geral como

$$\hat{V} = V_0 + \alpha V_1 + \beta V_s + \beta\gamma^5 V_p \quad (93)$$

onde

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1 = i\beta\beta\alpha = i\alpha = \beta\gamma^5 = i\beta\alpha$$

e as funções V_0, V_1, V_s, V_p introduzem interações de vários tipos: V_0, V_1 são as componentes temporal e espacial de um vetor de Lorentz no espaço-tempo de duas dimensões, V_s introduz uma interação escalar e V_p introduz uma interação pseudo-escalar.

Substituindo o potencial na forma explícita da Eq. (3) na Eq. (2), temos

$$\hat{H}\psi = [\alpha(\hat{p} + V_1) + \beta(m + V_s) + V_0 + i\beta\alpha V_p]\psi = E\psi \quad (94)$$

Se escolher um spinor em uma outra representação $\tilde{\psi} = U\psi$, e efetuar aplicação subsequente das transformações $U^\dagger U = 1$ e U na Eq. (94):

$$[\alpha(\hat{p} + V_1) + \beta(m + V_s) + V_0 + i\beta\alpha V_p]U^\dagger U\psi = EU^\dagger U\psi$$

$$U[\alpha(\hat{p} + V_1) + \beta(m + V_s) + V_0 + i\beta\alpha V_p]U^\dagger U\psi = EU\psi$$

chegamos a equação

$$[\tilde{\alpha}(\hat{p} + V_1) + \tilde{\beta}(m + V_5) + V_0 + i\tilde{\beta}\tilde{\alpha}V_p]\tilde{\psi} = E\tilde{\psi} \quad (95)$$

onde

$$\tilde{\alpha} = U\alpha U^\dagger, \quad \tilde{\beta} = U\beta U^\dagger$$

Vemos que a equação (95) na representação nova tem uma forma equivalente à equação na representação inicial (94).

Para um uso prático em busca de soluções, realização de cálculos, análise de resultados, discussão de propriedades, interpretações físicas uma representação pode ser mais preferível a outras. Além do mais na consideração de um mesmo problema em alguns casos surge necessidade de transição de uma representação a outra. Apresentaremos em seguida exemplos de uso das várias representações de matrizes de Dirac e spinores em trabalhos nos quais é envolvida a teoria de Dirac em 1+1 dimensões.

Apresentaremos em seguida exemplos de uso das várias representações de matrizes de Dirac e spinores em trabalhos nos quais é envolvida a teoria de Dirac em 1+1 dimensões. No trabalho [5] a equação de Dirac em (1+1) dimensões é discutida com potencial $V_0 = -q|x|$ (na notação da Eq. (93)) e autor interpreta o "átomo de hidrogênio em (1+1) dimensões". No trabalho para busca de buscando soluções da equação é usada à usando a representação das matrizes de Dirac $\beta = \sigma^1$, $\alpha = \sigma^3$. Mas para discussão do discute o limite não relativístico é usada à usando a representação $\beta = \sigma^3$, $\alpha = \sigma^1$ chamada de representação "padrão". Por analogia com matrizes de Dirac em 3+1 dimensões porque tem forma diagonal. Uma transformação entre as duas representações é indicada no trabalho implicitamente.

No Em trabalho [6] foi é considerada a equação de Dirac em 1+1 dimensões com potencial $V_5 = g|x|$ (na notação da Eq. (93)) e as Para busca de soluções da equação é usada a foram obtidas por meio da representação das matrizes de Dirac $\beta = \sigma^1$, $\alpha = \sigma^2$, chamada por alguns autores (por exemplo, na Ref. [7]) de representação de Jackiw-Rebbi. Para discussão do limite não relativístico é foi usada à representação $\beta = \sigma^3$, $\alpha = \sigma^2$. No trabalho é apresentada uma transformação unitária entre as duas representações na forma explícita $U = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

No trabalho [8] é discutida a equação de Dirac com potencial confinante e indicado que a representação $\beta = \sigma^1$, $\alpha = \sigma^2$ é mais conveniente para discussão de aspectos supersimétricos da equação de Dirac unidimensional com $V_0(x) = 0$, mas a representação $\beta = \sigma^3$, $\alpha = \sigma^2$ é mais útil para observa relações entre os casos de (1+1), (2+1) e (3+1) dimensões. No artigo [9] são discutidas as condições de contorno para uma partícula de Dirac em uma caixa unidimensional. No trabalho são foram usadas a representação $\beta = \sigma^3$, $\alpha = \sigma^1$, chamada da representação de Dirac e a representação $\beta = \sigma^1$, $\alpha = \sigma^3$, chamada da representação de Weyl. Com o uso da representação de Weyl foi obtida uma única família quadriparamétrica de condições de contorno e foi demonstrado que essa família de condições de contorno é dividida por três subfamílias na representação de Dirac. No trabalho é indicado também que para a discussão do limite não relativístico é mais conveniente a utilização da representação de Dirac.

Recentemente a equação de Dirac ou equações de tipo de Dirac são ativamente utilizadas em estudos nas áreas de matéria condensada, física atômica e molecular para descrição de sistemas em dimensões baixas que demonstram comportamento relativístico de partículas ou quasi-partículas. Mencionamos alguns trabalhos recentes nessa linha de pesquisa. No trabalho [10] são consideradas as partículas de Dirac em uma dimensão com massa e velocidade dependentes da posição. É demonstrado que soluções do tipo de em contínuo são possíveis no caso em que seja se é satisfeita de uma relação especial entre massa e velocidade das partículas. No trabalho [11] é estudado um hamiltoniano unidimensional do tipo Dirac com massa e

velocidade da forma de degrau. São determinadas as extensões auto-adjuntas físicas desse hamiltoniano e são apresentados os seus espectros. É discutida uma transição através de heteroestruturas unidimensionais descritas pela equação de Dirac. Nos trabalhos [10], [11] foi usada a representação de matrizes de Dirac $\beta = \sigma^3$, $\alpha = \sigma^1$.

5. CONCLUSÃO

No trabalho são considerados spinores de Dirac em 1+1 dimensões nas várias representações chamadas representações cíclicas. As representações cíclicas são definidas pela escolha das matrizes de Dirac na forma indicada na Eq. (6). Os spinores são obtidos na forma explícita com apresentação de cálculos bem detalhada. Usando a forma explícita dos spinores são determinadas as transformações unitárias entre os spinores nas várias representações cíclicas. São indicadas também algumas propriedades das transformações. O trabalho foi feito com intuito de esclarecer estrutura de spinores nas várias representações e elaborar um método de determinação de transformações unitárias entre spinores nas várias representações. Como um exemplo foram escolhidas representações cíclicas.

Como foi mencionado acima na Eq. (91) existem 24 diferentes representações das matrizes de Dirac e correspondentes spinores em (1+1) dimensões. Utilizando um método de determinação das transformações unitárias entre as representações (por exemplo, um proposto nesse trabalho) é possível determinar todas 552 transformações unitárias entre quaisquer duas representações. Como uma das continuações desse trabalho pretendemos determinar todas 552 transformações unitárias, estabelecer estruturas algébricas no conjunto das transformações e discutir propriedades de spinores nas várias representações. Esperamos que esses resultados encontrarem suas aplicações nos estudos que utilizam efetivamente a equação de Dirac para descrição de sistemas físicos em baixas dimensões.

-
1. Ryder LH. Quantum Field Theory. Cambridge University Press; 1996.
 2. Itzykson C, Zuber J-B. Quantum Field Theory. McGraw-Hill; 1980.
 3. Peskin ME, Schroeder DV. An introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley Publication, 1995.
 4. Weinberg S. Quantum Field Theory 1. Cambridge University Press; 2005.
 5. Galic H. Fun and frustration with hydrogen in a 1+1 dimension. Am. J. Phys. 1988; 56: 312.
 6. Hiller JR. Solution of the one-dimensional Dirac equation with a linear scalar potential. Am. J. Phys. 2002; 70: 522. quant-ph/0111011.
 7. Bhalerao RS, Ram B. Fun and frustration with quarkonium in a 1+1 dimension. Am. J. Phys. 2001; 69: 817.
 8. Nogami FM, Toyama W D. The Dirac equation with a confining potential. Am. J. Phys. 2003; 71: 950.
 9. Alonsoy V, Vincenzos S. General boundary conditions for a Dirac particle in a box and their non-relativistic limits. J. Phys. 1997; A30: 8573.
 10. Mustafa O. (1+1)-Dirac bound states in one dimension, with position-dependent Fermi velocity and mass. Cent. Eur. J. Phys. 2013; 11: 480.
 11. González-Díaz LA, Díaz AA, Díaz-Solórzano S, Darias JR. Self-adjoint Dirac type Hamiltonians in one space dimension with a mass jump. J. Phys. 2015; A48: 045207.