



# Modelagem dinâmica de cabos para aplicações subaquáticas

Dynamic modeling of cables for underwater applications

T. A. Pouzada<sup>1\*</sup>; S. C. P. Gomes<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemática, Estatística e Física (IMEF)/Núcleo de Matemática Aplicada (NuMA), Universidade Federal do Rio Grande (FURG), CEP:96201-900, Rio Grande-RS, Brasil

\* thiago.pouzada@gmail.com

(Recebido em 22 de outubro de 2014; aceito em 29 de dezembro de 2014)

A modelagem dinâmica de cabos constitui tema de pesquisa de grande importância e aplicação prática na atualidade. No entanto, devido às não linearidades presentes na dinâmica de cabos, bem como à necessidade de se trabalhar com muitos graus de liberdade, desenvolver modelos dinâmicos para estes sistemas torna-se tarefa difícil. Para desenvolver modelos dinâmicos de cabos, o presente artigo utiliza o Método do Formalismo Discreto (*Lumped Mass Approach*), que supõe o cabo dividido em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias. Os cabos foram considerados com uma das extremidades articulada a uma estrutura flutuante (navio ou plataforma), enquanto que em sua outra extremidade consideraram-se dois casos: uma carga terminal livre; extremidade fixa a Terra. Os cabos estão submersos e o arrasto hidrodinâmico foi considerado a partir de um modelo simples, proporcional ao quadrado da velocidade. Utilizando-se o formalismo de Euler-Lagrange, foram desenvolvidos os modelos dinâmicos para cabos considerando-se dois, três e quatro elos. Uma vez obtidos estes modelos, foram realizadas simulações, as quais mostraram resultados qualitativamente de acordo com o esperado fisicamente.

Palavras-chave: cabos, modelagem, dinâmica.

Abstract: Dynamic modeling of cables is a research theme of great importance and practical application nowadays. However, due to non-linearity behavior present on cable dynamics, as well as the need to work with many degrees of freedom, to develop dynamic models for these systems becomes a hard task. To develop dynamic models of cables, this article uses the Lumped Mass Approach Method, which supposes the cable divided in rigid links connected by fictitious elastic joints. The cables were considered with one of its endings articulated to a floating structure (ship or platform), while on the other ending were considered two cases: one free terminal loading; ending fixed to the ground. The cables are submersed and the hydrodynamic drag was considered from a simple model, proportional to the velocity's square. Using the Euler-Lagrange Formalism, the dynamic models for cables considering two, three and four links were developed. Once these models were obtained, simulations were performed, proving the results agreeing qualitatively with the physical expected.

Keywords: cables, modeling, dynamic.

## 1. INTRODUÇÃO

A importância da modelagem de cabos em geral está diretamente associada a um setor em crescente desenvolvimento, correlato ao ramo das indústrias petrolífera e naval. Cabos umbilicais utilizados em ROVs (*Remotely Operated Vehicles*), *risers*, ou ainda, cabos de reboque, amarração ou ancoragem para estruturas flutuantes requerem atenção especial das empresas envolvidas nestes setores. A modelagem analítica fiel desses cabos, inserindo-os no meio oceânico e aproximando-os de situações reais, torna-se atraente nesse sentido.

A maior parte dos artigos científicos encontrados sobre a modelagem de cabos utiliza a técnica de elementos finitos e o interesse final geralmente reside na determinação dos esforços em equilíbrio estático, importantes para efeito de dimensionamento. Porém, existem alguns trabalhos que tratam da modelagem dinâmica de cabos.

Pereira [1] investiga a interação fluido-estrutura de um cabo, a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Zanela [2] aborda a modelagem tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo, utilizando o mesmo método proposto por Pereira [1]. Rocha [3] trata da modelagem dinâmica de veículos subaquáticos não tripulados do tipo ROV, incluindo a dinâmica do cabo umbilical. Fang [4] estuda os efeitos de torção e flexão

em cabos de reboque, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Bamdad [5] propõe uma solução analítica para a vibração em cabos que suspendem grandes estruturas.

Di Marzo [6] estuda metodologias para a análise de tensões induzidas em cabos de sinal utilizados como umbilicais em veículos não tripulados, utilizando o Método dos Elementos Finitos. Ainda a partir deste método, Sun [7] aborda a análise não linear de sistemas de cabos de reboque. Bi [8] trata o estudo de cabos umbilicais a partir de análise de tensão, utilizando também elementos finitos. Pathote [9] apresenta uma técnica de modelagem estática para cabos de sustentação de estruturas de concreto, utilizando a curva *B-spline*. Liu [10] trata da discretização de cabos por elementos finitos, propondo um nó deslizante de posição variável entre dois nós fixos no cabo, quando são conectados cabos com outros fios em estruturas de redes de transmissão. Antunes [11] aborda a modelagem de sistemas dinâmicos do tipo cabo, utilizando-se da formulação variacional e métodos de discretização dos sistemas contínuos por resíduos ponderados e elementos finitos. Nascimento [12] estuda a modelagem estática de cabos de transmissão de energia pelo Método dos Elementos Finitos.

Todas estas contribuições comprovam a importância crescente deste tema, especialmente em termos de modelagem dinâmica. Sendo assim, foram consideradas duas situações distintas: o cabo fixo a uma plataforma móvel em uma das extremidades e livre na outra; o cabo fixo à plataforma móvel em uma extremidade e fixo a Terra na outra. Considerou-se a plataforma móvel (que pode ser um navio ou uma embarcação) com possibilidade de movimento apenas na vertical, simulando assim as oscilações que ocorrem na superfície do mar. Foi utilizado o formalismo de Euler-Lagrange para a obtenção do modelo dinâmico do cabo, cuja estrutura flexível foi aproximada por uma equivalente discreta formada por elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas. Foram desenvolvidos modelos dinâmicos para os casos do cabo dividido em dois, três e quatro elos, tendo-se realizado diversas simulações. O objetivo futuro é obter algoritmos genéricos para gerar o modelo dinâmico de forma automática para um número qualquer de elos considerados, ou seja, algoritmos que consigam gerar o modelo dinâmico para um número qualquer de graus de liberdade escolhido para o sistema.

A partir do modelo dinâmico de um cabo é possível obter uma aproximação da dinâmica real do mesmo e assim, pode-se simular diversas situações, considerando-se inclusive esforços externos presentes no contexto oceânico que influenciam no movimento do cabo.

## 2. MODELOS DINÂMICOS

Os cabos considerados na pesquisa que originou este artigo estão articulados a uma plataforma ou embarcação na superfície da água e, na outra extremidade, foram consideradas duas situações: carga terminal de massa  $m_c$  livre; cabo fixo a Terra. Em ambos os casos, supõe-se que o movimento vibratório do cabo está contido em um único plano. Estas situações poderiam aproximar diversas aplicações reais, como cabos de amarração, *risers*, etc., conforme ilustrado na Figura 1. Considerou-se ainda que o movimento da extremidade do cabo que é fixa à plataforma ou embarcação acontece em um único grau de liberdade, na vertical.

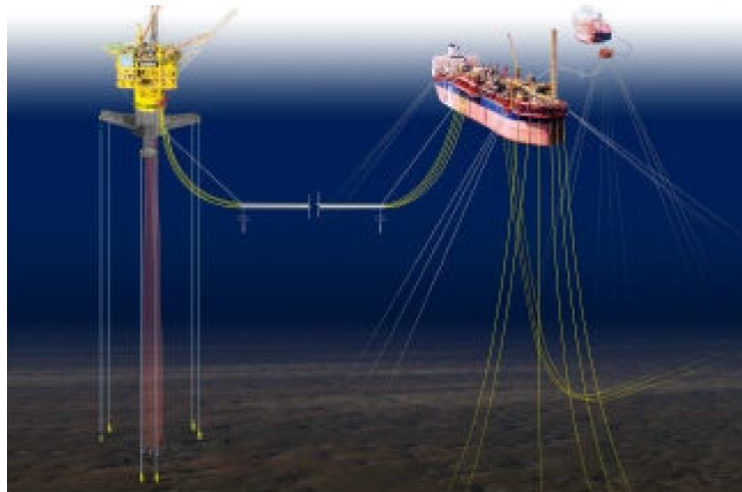


Figura 1: Cabos em aplicações subaquáticas (fonte: Pereira [1]).

Utilizou-se o formalismo discreto de modelagem, a partir do qual se supõe o cabo formado por elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas, conforme ilustrado na Figura 2. Cada articulação fictícia tem a sua constante elástica e o seu coeficiente de atrito conhecidos.

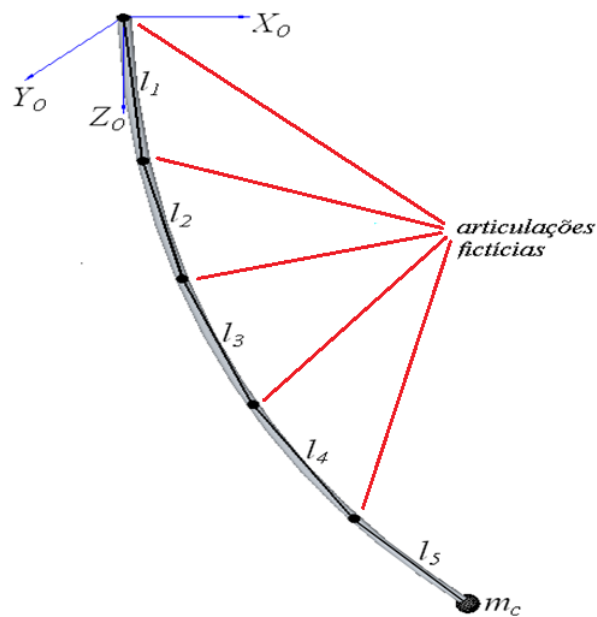


Figura 2: Aproximação discreta para a estrutura do tipo cabo.

Foram desenvolvidos analiticamente modelos dinâmicos considerando-se dois, três e quatro elos. As Figuras 3 e 4 mostram ilustrações para dois e quatro elos, respectivamente. O empuxo anula o peso no caso da embarcação ou plataforma e a dinâmica imposta pela superfície da água foi aproximada por um sistema massa-mola-amortecedor.

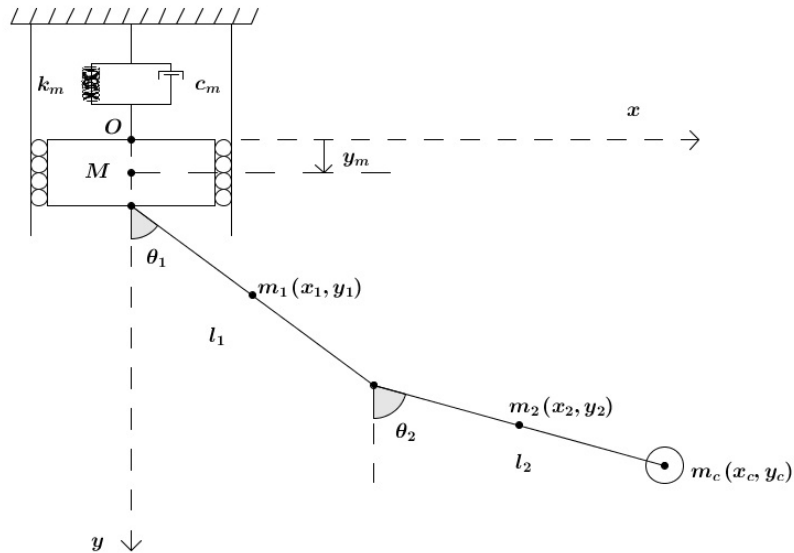


Figura 3: Aproximação discreta para o cabo utilizando-se dois elos.

O vetor com as coordenadas de posição para a estrutura com dois elos possui a forma:

$$\vec{y} = [y_m \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T$$

Enquanto que para quatro elos o mesmo é escrito na forma:

$$\vec{y} = [y_m \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T$$

Portanto, a dinâmica com  $n$  elos possui  $n + 1$  graus de liberdade.  $y_m$  é a posição vertical da embarcação ou plataforma, com relação a um referencial inercial com origem na superfície média da água.  $\theta_i, i = 1, \dots, n$ , são os ângulos dos elos com relação à direção vertical.

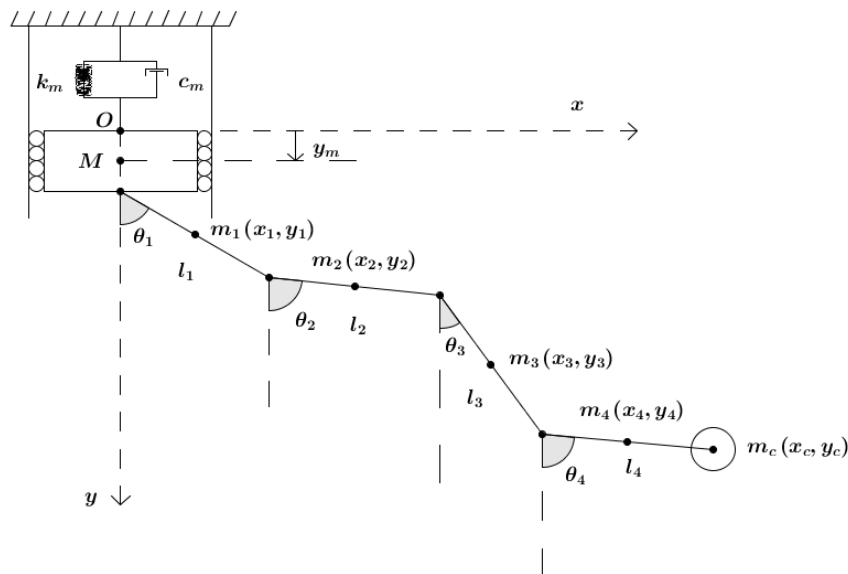


Figura 4: Aproximação discreta para o cabo utilizando-se quatro elos.

A energia cinética de translação de cada elo é escrita na forma:

$$E_{cTi} = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \tag{1}$$

onde:  $m_i$  são as massas de cada elo;  $x_i$  e  $y_i$  são as posições horizontal e vertical, respectivamente, do centro de massa de cada elo em relação ao mesmo referencial inercial adotado para a embarcação ou plataforma, com  $i = 1, \dots, n$ .

A energia cinética rotacional de cada elo, relativa à rotação do elo sobre um eixo transversal passando pelo seu centro de massa, possui a forma:

$$E_{cRi} = \frac{m_i}{12} l_i^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (2)$$

onde  $l_i$  são os comprimentos de cada elo.

A energia cinética total da estrutura é obtida na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{y}_m^2 + \sum_{i=1}^n (E_{cTi} + E_{cRi}) \quad (3)$$

A energia potencial elástica em cada articulação pode ser escrita na forma:

$$E_{pEi} = \frac{1}{2} k_i (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \quad (i = 1, \dots, n - 1) \quad (4)$$

onde  $k_i$  são as constantes elásticas de cada articulação.

A energia potencial gravitacional de cada elo possui a forma:

$$E_{pGi} = m_i g h_i \quad (5)$$

onde:  $h_i$  corresponde à altura do centro de massa (CM) de cada elo com relação à sua posição quando a estrutura encontra-se em repouso e na vertical e  $g$  corresponde à constante de aceleração gravitacional.

A energia potencial total da estrutura pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$E_p = \frac{1}{2} k_m y_m^2 + m_c g h_c + \sum_{i=1}^{n-1} E_{pEi} + \sum_{i=1}^n E_{pGi} \quad (6)$$

onde:  $m_c$  e  $h_c$  correspondem à massa e a altura da carga terminal, respectivamente quando esta é livre.  $k_m$  corresponde à constante elástica considerada na embarcação ou plataforma.

Uma vez determinadas as energias cinética e potencial da estrutura, o Lagrangeano possui a forma:

$$L = E_c - E_p \quad (7)$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange a cada um dos  $n + 1$  graus de liberdade, tem-se então o modelo dinâmico do sistema, na forma:

$$I(\vec{y}) \ddot{\vec{y}} + C \dot{\vec{y}} + K \vec{y} + \vec{F}(\vec{y}, \dot{\vec{y}}) + \vec{G}(\vec{y}) = \vec{T}_m \quad (8)$$

$I(\vec{y})$  é a matriz de inércia,  $C$  a matriz de coeficientes de atrito,  $K$  a matriz de constantes elásticas e  $\vec{F}(\vec{y}, \dot{\vec{y}})$  o vetor de esforços do tipo Coriolis-centrífugos.  $\vec{G}(\vec{y})$  é o vetor de esforços de natureza gravitacional, no qual estão inclusos os esforços devidos ao empuxo nos elos e na carga terminal. O empuxo em cada elo (e também na carga terminal) é considerado atuando no

CM de cada elemento, na mesma direção da força peso, mas em sentido contrário a esta.  $\vec{T}_m$  é o vetor com os esforços externos e nele estão inclusos os esforços devidos ao arrasto hidrodinâmico. Considerou-se o fluido em repouso (ausência de correntes subaquáticas) e que, em cada elo, a força de arrasto atua no centro de massa deste elo e é proporcional ao quadrado da sua velocidade linear, na forma:

$$a_i = -\gamma_i v_i^2 \text{sign}(v_i) = -\gamma_i \frac{l_i^2}{4} \dot{\theta}_i^2 \text{sign}(\dot{\theta}_i) \quad (9)$$

onde:  $\gamma_i$  é o coeficiente de arrasto do elo  $i$  e  $v_i$  a sua velocidade linear.

### 3. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

As simulações realizadas consideraram os dois casos já citados anteriormente: cabo articulado à plataforma em uma extremidade e livre na outra; articulado à plataforma em uma extremidade e fixo a Terra na outra. Na realidade, o modelo dinâmico é o mesmo. Porém, no caso do cabo fixo a Terra, considera-se que a massa da carga terminal é muito grande (considerou-se  $m_c = 1 \times 10^{14} \text{ kg}$ ) e que o seu empuxo é igual ao seu peso. Os parâmetros adotados para a realização das simulações foram os seguintes:

- $l = 5 \text{ m}$  (comprimento do cabo);
- $l_i = l/n$  (comprimento de cada elo);
- $r_i = 0.01 \text{ m}$  (raio do elo, considerado constante em toda a sua extensão);
- $\rho_c = 7850 \text{ kg/m}^3$  (massa específica do cabo);
- $m_c = 20 \text{ kg}$  (massa da carga terminal livre);
- $m_c = 1 \times 10^{14} \text{ kg}$  (massa da carga terminal quando o cabo é fixo a Terra);
- $M = 600 \text{ kg}$  (massa da plataforma);
- $c_m = 56 \text{ Ns/m}$  (coeficiente de atrito da plataforma);
- $c_i = 2.8 \text{ Ns/rd}$  (coeficiente de atrito em cada articulação fictícia);
- $k_i = 104.7 \text{ N/rd}$  (constante elástica em cada articulação fictícia);
- $k_m = 200 \text{ N/m}$  (constante elástica da plataforma);
- $\gamma_i = 160 \text{ Ns}^2/(\text{rd m})^2$  (coeficiente de arrasto hidrodinâmico).

Os resultados de simulações mostrados a seguir estão na forma de uma sequência de frames relativos à configuração espacial do cabo. Considerou-se quatro elos para representar a flexibilidade contínua ( $n = 4$ ). Nas duas primeiras simulações mostradas a seguir a carga terminal do cabo é livre. A partir de uma configuração inicial, o cabo é solto. Na Figura 5 o cabo está submerso em água e, portanto, além da ação gravitacional há o arrasto hidrodinâmico e o empuxo. Os frames são mostrados a cada  $0.5 \text{ s}$ . Percebe-se uma dinâmica bastante amortecida em razão principalmente do arrasto hidrodinâmico. Na Figura 6 o cabo é considerado fora d'água e os frames são mostrados a cada  $0.2 \text{ s}$ , já que, neste caso, a dinâmica é mais rápida em razão de ser menos amortecida devido à ausência do arrasto hidrodinâmico. O primeiro frame tem a mesma configuração espacial inicial da figura anterior, enquanto que o último mostra a configuração espacial após  $3 \text{ s}$  de evolução dinâmica.

A Figura 7 mostra uma simulação considerando-se uma das extremidades do cabo fixa a Terra. O cabo é posto inicialmente na sua posição de equilíbrio estático. A partir de então uma força senoidal com  $300 \text{ N}$  de amplitude e  $0.25 \text{ Hz}$  de frequência foi aplicada na extremidade do cabo que é fixa à plataforma, na direção vertical, simulando assim uma força que a plataforma exerceria no cabo devido ao movimento das ondas. Neste caso, a vibração no cabo é forçada em razão do movimento da plataforma.

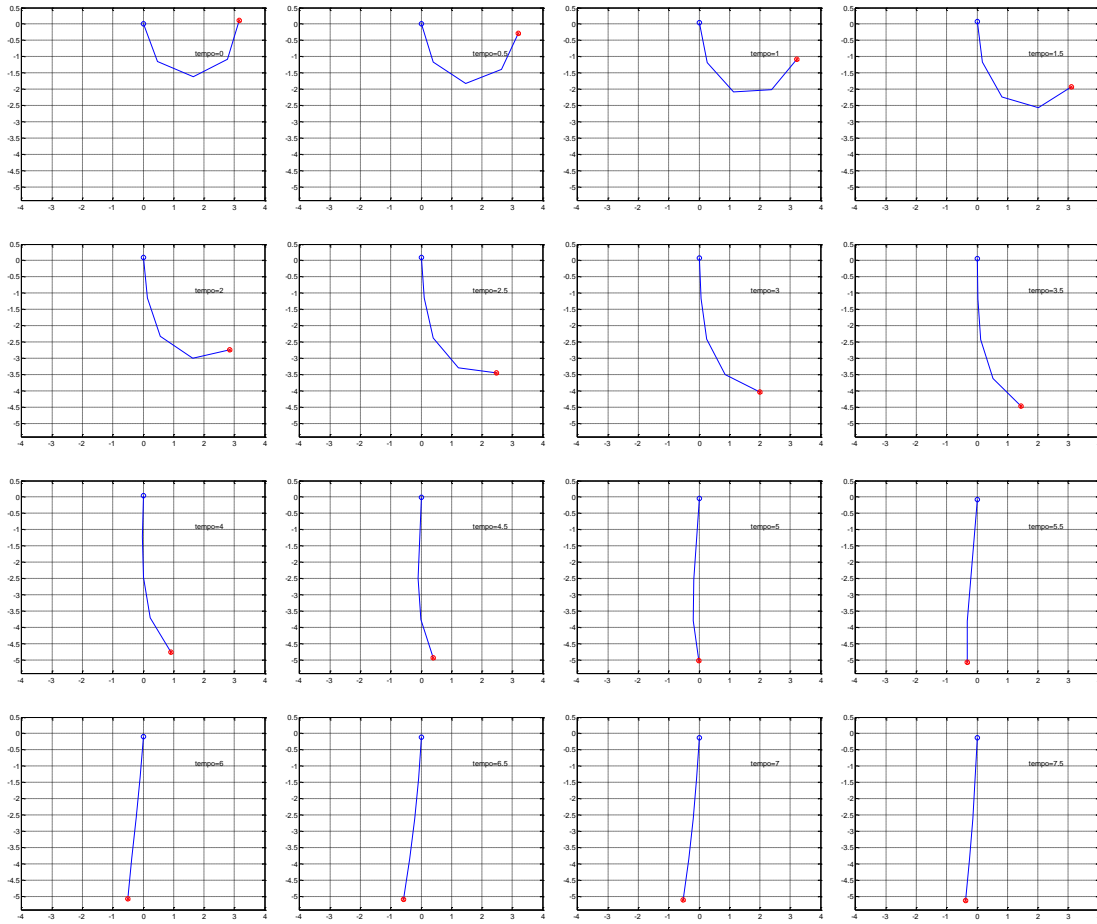


Figura 5: Cabo com carga terminal livre e submerso em água, com frames a cada 0.5 s.

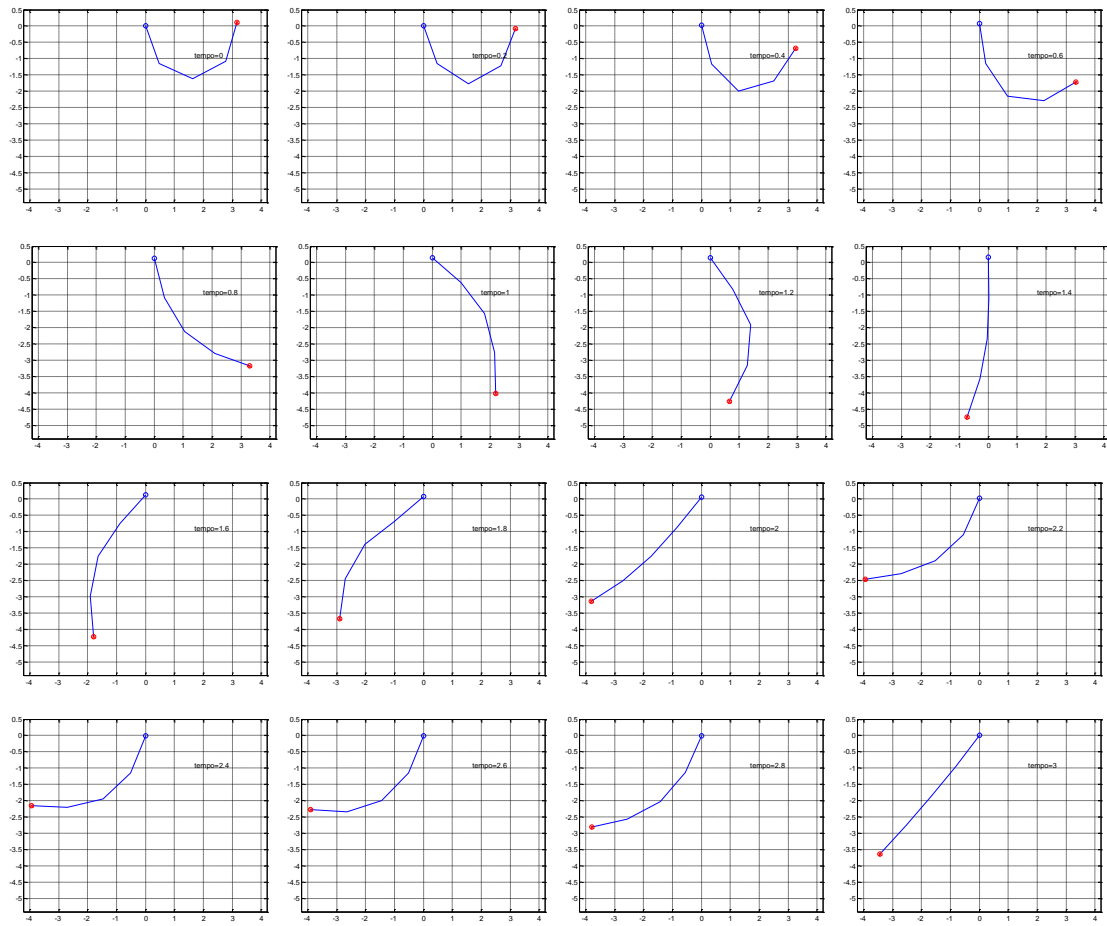


Figura 6: Cabo com carga terminal livre e fora d'água, com frames a cada 0.2 s.



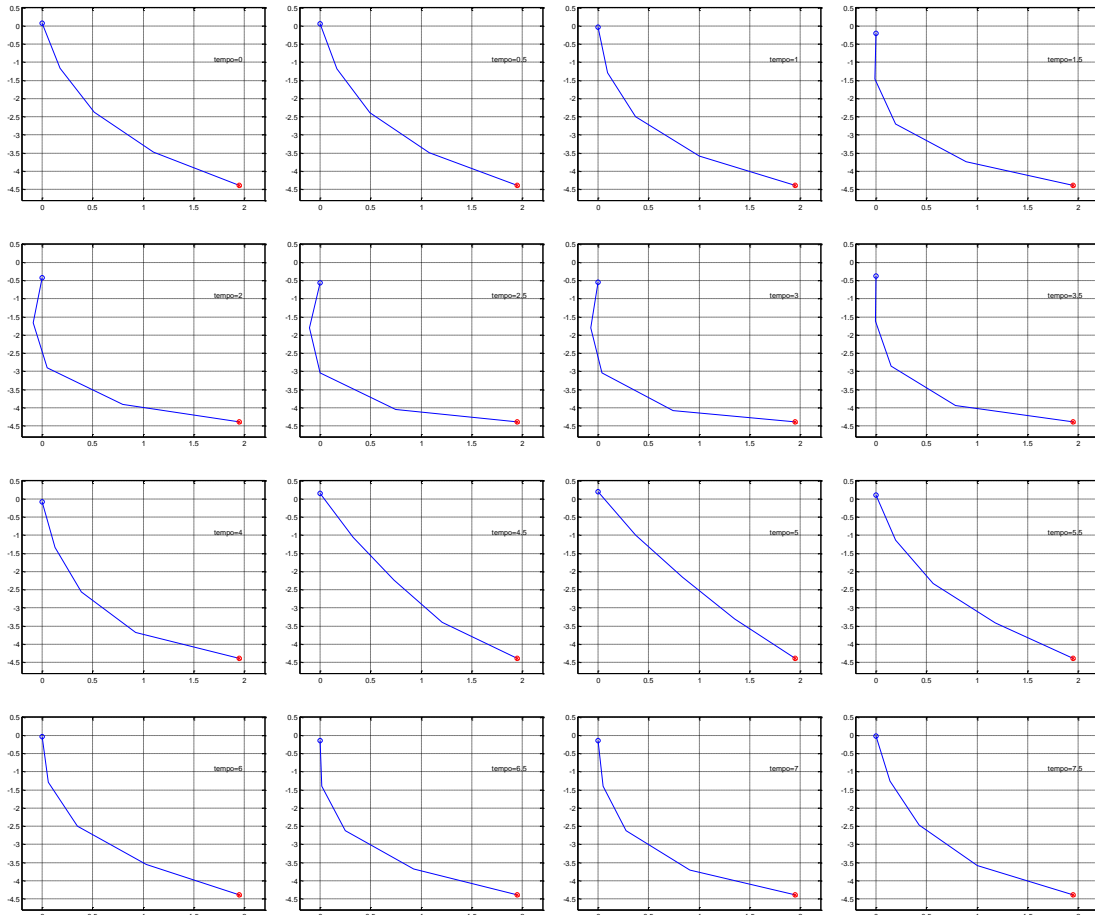


Figura 7: Cabo submerso e com a carga terminal fixa a Terra, com frames a cada 0.5 s.

#### 4. CONCLUSÕES

Os modelos dinâmicos desenvolvidos mostraram resultados de simulações conforme o esperado fisicamente, tanto no caso do cabo com carga terminal livre, quanto no caso do cabo fixo a Terra. Este último caso assemelha-se a aplicações relativas a cabos de ancoragem ou amarração usados em plataformas ou embarcações, os quais se constituem em importantes aplicações subaquáticas. Como trabalhos futuros, serão realizados esforços na tentativa de generalizar a obtenção analítica do modelo dinâmico para um número qualquer de graus de liberdade adotado para a dinâmica estrutural. Os modelos para dois, três e quatro elos serão fundamentais para a obtenção de algoritmos que possibilitem a geração automática de modelos, considerando-se um número qualquer de graus de liberdade.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Pereira AEL. O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo [Tese]. Doutorado em Matemática Aplicada. Porto Alegre (RS): Universidade Federal do Rio Grande do Sul; 2010. 178 p.
2. Zanela EB. Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas [Dissertação]. Mestrado em Engenharia Oceânica. Rio Grande (RS): Universidade Federal do Rio Grande; 2013. 147 p.

3. Rocha IBP. Dinâmica de Cabos Umbilicais com Veículos Subaquáticos do Tipo ROV [Dissertação]. Mestrado em Modelagem Computacional. Rio Grande (RS): Universidade Federal do Rio Grande; 2013. 116 p.
4. Fang Z, He Q, Xiang B, Xiao H, He K, Du Y. A Finite Element Cable Model and Its Applications Based on the Cubic Spline Curve. *China Ocean Eng.* 2012;27(5):683-692.
5. Bamdad M. Analytical Dynamic Solution of a Flexible Cable-suspended Manipulator. In: *Front. Mech. Eng.* 2013;8(4):350-359.
6. Di Marzo GR. Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais [Dissertação]. Mestrado em Engenharia. São Paulo (SP): Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; 2010. 106 p.
7. Sun FJ, Zhu ZH, Larosa M. Dynamic Modelling of Cable Towed Body Using Nodal Position Finite Element Method. In: *Ocean Engineering Journal*, Elsevier; 2010. Disponível em [www.elsevier.com/locate/oceaneng](http://www.elsevier.com/locate/oceaneng). Acesso em 15/08/2014.
8. Bi G, Zhu S, Liu S, Fang X, Wang L. Dynamic Simulation and Tension Compensation Research on Subsea Umbilical Cable Laying System. In: *J. Marine Sci. Appl.* 2013;12:452-458.
9. Pathote P. Efficient Mathematical Model for Prestressing Cables and Its Implementation in Computer Analysis. *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*. 2014 May-Jun;10(3):32-38.
10. Liu Y, Qian Z, Xia K. Mechanical Response of Transmission Lines Based on Sliding Cable Element. *J. Cent. South Univ.* 2014 2:3370-3377.
11. Antunes EB. Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis - Cabos e Placas [Dissertação]. Mestrado em Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro (RJ): Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; 2010. 145 p.
12. Nascimento CAM. Modelagem Numérica de Vibrações em Cabos de Transmissão de Energia Elétrica [Monografia]. Graduação em Engenharia Mecânica. Brasília (DF): Universidade de Brasília; 2011. 71 p.